

## OFICINA DE DOBRADURAS-OBMEP

### Introdução:

Este é um roteiro de atividades que envolvem o uso de dobraduras para estudar problemas geométricos.

Usaremos a expressão fazer uma dobradura como o ato de dobrar, uma transformação do plano; o termo dobra ou vinco é usado para a marca no papel resultante da dobradura.

Na geometria das dobraduras, dobrar significa ao mesmo tempo *sobrepor* pontos e obter a reta de dobra, que é o lugar dos pontos que permanecem fixos nesta transformação.

Pode-se observar experimentalmente que pontos sobrepostos (ou seja que coincidem no processo de dobra) equidistam da dobra. Tal fato é essencial na justificativa das construções geométricas que utilizam dobraduras.

Desse modo, associada a uma dobradura, temos a idéia de *simetria* em relação à dobra. Podemos imaginar que a dobra é um espelho e que pontos equidistantes correspondem a imagens refletidas (ou "virtuais").

Seja  $r$  uma reta. Chama-se uma *reflexão com respeito à reta  $r$*  à transformação do plano que leva um ponto  $P$  ao ponto  $Q$ , simétrico de  $P$  em relação à reta, isto é, tal que a distância de  $P$  à reta  $r$  é igual à distância de  $Q$  a  $r$ .

Observe que os pontos sobre a reta  $r$  permanecem fixos pela reflexão.  $r$  é chamada *eixo* da reflexão.

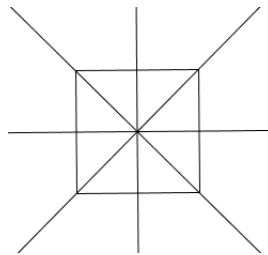
Deste modo, após uma dobradura, obtemos uma reta  $r$  tal que, pontos superpostos são exatamente aqueles que se correspondem por uma reflexão.

**Propriedade:** Uma reflexão preserva comprimento de segmentos e a medida de ângulos.

Esta é uma propriedade essencial na qual estão baseadas as justificativas das construções geométricas que utilizam dobraduras.

Uma figura plana possui uma simetria por reflexão se existe uma reta  $r$  tal que a reflexão da figura com respeito a  $r$  resulta na própria figura. Em outras palavras, uma figura possui uma simetria por reflexão se é possível encontrar um eixo de simetria com respeito ao qual a figura pode ser refletida.

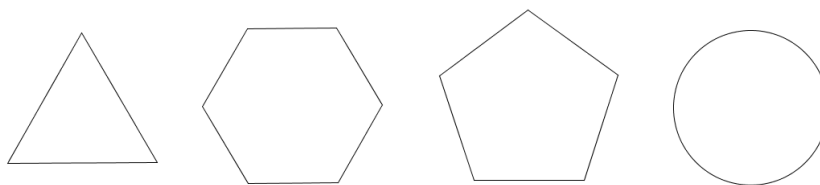
Várias figuras planas apresentam este tipo de simetria. Por exemplo, num quadrado é possível encontrar 4 retas (ou eixos) em relação às quais, se fizermos uma reflexão os pontos do quadrado se associam a pontos do quadrado.



Outros exemplos desse tipo de simetria, podem ser encontrados na natureza, na arquitetura e até na música.

Os alunos podem verificar simetrias por reflexão em várias situações, usando fotografias, por exemplo.

Na discussão sobre simetria podemos propor aos alunos que encontrem todos os eixos de simetria das figuras abaixo:



É possível desenvolver uma abordagem rigorosa da geometria das dobraduras e dar um tratamento abstrato às operações e relacioná-las com os axiomas da geometria euclidiana. (veja por exemplo [1] ou [2]).

Não pretendemos fazer isso aqui, preferimos dar um tratamento intuitivo para que se possa experimentar, perceber e aprender, por meio da manipulação direta, alguns fatos geométricos.

O objetivo é aprender algumas técnicas, justificar algumas construções geométricas e divertir-se!

Evidentemente *as justificativas devem ser usadas de acordo com o nível de conhecimento da turma.*

A idéia da oficina é desenvolver um diálogo com os alunos de modo a introduzir novos conceitos primeiramente de maneira informal e conforme a situação e interesse, aprofundá-los. O professor pode também sugerir outras construções e problemas a partir das aqui apresentadas

Algumas das provas usam os casos de congruências e conceitos que para muitos alunos serão novos; outras, utilizam o Teorema de Pitágoras e semelhanças de triângulos. Este é um bom momento para rever ou *motivar* os alunos para o estudo desses tópicos.

Iniciamos com algumas construções simples:

Pedimos que os alunos verifiquem experimentalmente que:

- 1) Dados dois pontos distintos numa folha de papel, existe uma dobra (ou vinco) que contém os dois pontos.
- 2) Dados dois pontos distintos,  $P_1$  e  $P_2$  numa folha de papel existe uma única dobradura que sobrepe  $P_1$  sobre  $P_2$ .
- 3) Dadas duas dobras  $r_1$  e  $r_2$  que se intersectam em um ponto  $P$  existe uma dobradura que sobrepe  $r_1$  sobre  $r_2$ .
- 4) Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$  e duas dobras  $r_1$  e  $r_2$ , que se intersectam num ponto  $P$ , existe uma dobradura que leva o ponto  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .
- 5) Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$  e uma dobra  $r_1$ , existe uma dobradura cuja dobra passa em  $P_2$  e que leva o ponto  $P_1$  sobre a dobra  $r_1$

### Outras construções:

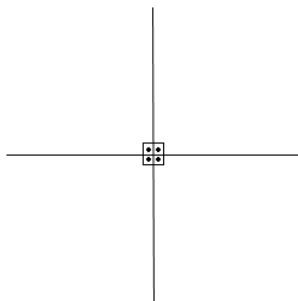
Seguindo o roteiro de atividades, apresentamos algumas justificativas para as construções. Algumas dessas justificativas utilizam fatos, tais como os casos de congruência de triângulos ou o Teorema de Pitágoras, que provavelmente não são familiares aos bolsistas do nível I. Portanto, **o uso ou não desses argumentos fica a critério do professor orientador.**

#### 6) **Reta perpendicular a uma reta $r$ passando por um ponto $P$**

Ao dobrarmos uma folha de papel duas vezes, superpondo os lados, obtemos no centro quatro ângulos retos. A construção segue esta idéia.

Sugerimos que se faça inicialmente o caso  $P \in r$ .

Justificativa: A reflexão obtida envia  $r$  sobre  $r$ . Como uma reflexão preserva ângulos os dois ângulos obtidos possuem a mesma medida. Como a soma desses ângulos é igual a 180 graus, obtém-se que os ângulos são retos.



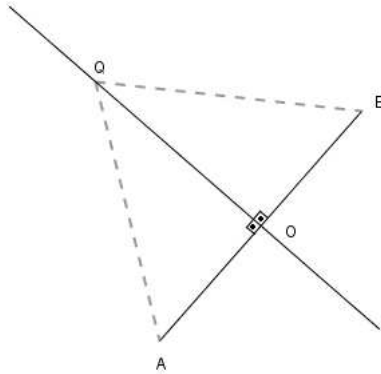
Observação: a partir desse construção, propor a construção da reta *paralela* a uma reta  $r$  dada passando por um ponto  $P$  fora de  $r$ .

#### 7) **Mediatriz de um segmento $\overline{AB}$**

Justificativa: Sejam  $m$  a reta obtida na construção e  $O$  a sua intersecção com o segmento  $\overline{AB}$ . De acordo com o item 6) a reta  $m$  é perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ . Pela propriedade da reflexão, temos de  $|AO| = |OB|$ .

Se  $Q \in m$  é um ponto sobre a reta obtida, então os triângulos  $\triangle QOA$  e  $\triangle QOB$  são congruentes ( caso LAL).

Segue-se que  $|QA| = |QB|$ . Ou seja  $Q$  é equidistante de  $A$  e de  $B$ , e portanto, está na mediatriz.

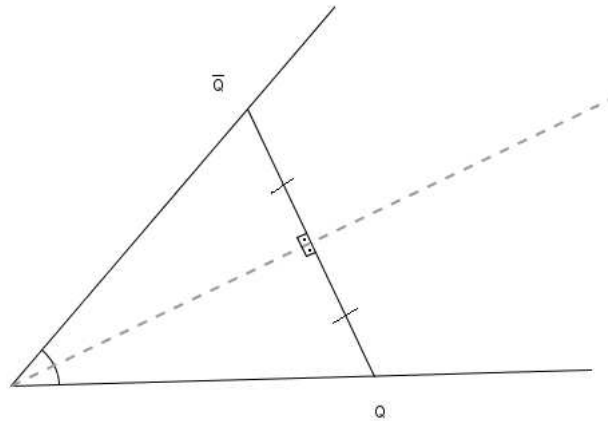


### 8) Bissetriz de um ângulo:

Justificativa: Usa-se novamente o caso (LAL) de congruência de triângulos.

Como refletimos uma semi-reta sobre a outra, fixado um ponto  $Q$  sobre um dos raios e a sua imagem  $\bar{Q}$  pela reflexão na reta obtida, então pela propriedade da reflexão obtemos dois triângulos retângulos congruentes. De modo que os ângulos correspondentes possuem a mesma medida.

Isto significa que a reta obtida divide o ângulo dado em dois ângulos iguais (bissetriz).

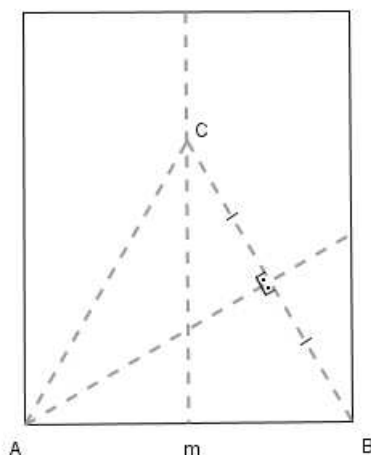


### 9) Triângulo equilátero:

Justificativa: Observe que iniciamos a construção obtendo a mediatriz da base  $\overline{AB}$ .

Em seguida obtivemos uma reta em relação à qual refletimos o ponto  $B$  sobre a mediatriz. Esse ponto refletido denotamos por  $C$ . Pela propriedade de reflexão,  $|AB| = |AC|$ . Como  $C$  pertence à mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ , temos:  $|CB| = |AC|$ .

Veja a figura:



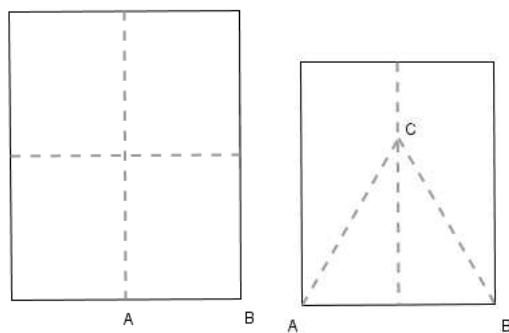
Logo, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices de um triângulo equilátero, que é obtido simplesmente dobrando-se o papel para traçar os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$

Após construído o triângulo equilátero, podemos propor que os alunos sobreponham os lados, de modo a traçar as bissetrizes. Se a construção for feita com cuidado, será possível notar a intersecção dessas retas num ponto  $O$ . Podemos então solicitar que os alunos redijam o que observaram e provem que este ponto é equidistante dos lados.

Pergunta, será que isso é válido para outros triângulos?

### 10) Hexágono regular:

Justificativa: Na folha dobrada duas vezes, primeiro no sentido vertical e depois no sentido horizontal, construímos um triângulo equilátero. A base  $\overline{AB}$  do triângulo encontra-se sobre a segunda dobra.



A reta paralela à base  $\overline{AB}$  e passando por  $C$  tem comprimento igual a  $|AB|$ . O ponto  $C$  é o ponto médio desse segmento. Logo ao desdobrarmos uma vez a folha, obtemos três triângulos equiláteros congruentes. Finalmente, ao desdobrarmos mais uma vez a folha, obtemos seis triângulos equiláteros que formam um hexágono de lado  $|AB|$ .

### 11) Razão áurea:

Dizemos que um ponto  $H$  divide um segmento  $\overline{AB}$  numa *razão áurea* se

$$\frac{|AB|}{|AH|} = \frac{|AH|}{|HB|}$$

Se  $|AH| = m$  e  $|HB| = n$  então  $\frac{m+n}{m} = \frac{m}{n}$ .

Se denotamos por  $\phi = \frac{m}{n}$ , então temos a seguinte equação :

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

Ou seja  $\phi$  é a raiz positiva da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ , isto é,  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ( a outra raiz é  $-\frac{1}{\phi}$ ).

O valor de  $\phi$  é irrelevante para o que é feito nesta oficina e não há necessidade de resolver a equação, entretanto, os alunos podem ficar curiosos sobre o nome. Nesse caso vale a pena explorar algumas propriedades tanto aritméticas quanto geométricas, como por exemplo, a seguinte:

A reflexão de  $H$  com respeito ao ponto médio de  $\overline{AB}$  define um ponto  $S$  tal que  $|AS| = |HB|$ .

O ponto  $S$  divide o segmento  $\overline{AH}$  na razão áurea pois

$$\frac{|AH|}{|AS|} = \frac{|AH|}{|HB|} = \phi$$

Vejamos como justificar a construção da razão áurea :

Podemos usar o Teorema de Pitágoras.

Iniciamos com uma folha quadrada e a dividimos ao meio. Denotamos por  $\overline{AB}$  o segmento correspondente ao lado inferior da folha.

Seja  $F$  o ponto médio do lado direito.

Note que pela propriedade da reflexão, se  $B'$  é a imagem da reflexão de  $B$  sobre  $\overline{AF}$ , então,  $|B'F| = |BF| = \frac{|AB|}{2}$ .

Pelo Teorema de Pitágoras:  $|AF|^2 = |AB|^2 + |FB|^2$

Ou  $|AF|^2 = |AB|^2 + \frac{|AB|^2}{4} = \frac{5}{4}|AB|^2$ .

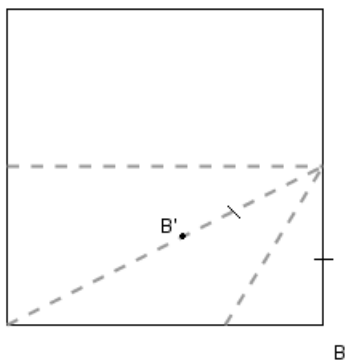
Portanto  $|AB'| = |AF| - |B'F| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB| - \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}|AB|$ .

Ou seja  $|AB| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}|AB'|$

Na etapa final a reflexão foi usada simplesmente para trazer comprimento  $|AB'|$  para o segmento  $\overline{AB}$ , determinando assim o ponto  $H$ .

De modo que  $\frac{|AB|}{|AH|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$  o número de ouro ou razão áurea.

Veja a figura:



Veremos a seguir como aparece a razão áurea no pentágono regular.

### 12) Pentágono regular:

Antes da construção do pentágono regular, é importante fazer alguns desenhos para que sejam percebidas (ou provadas) algumas propriedades. Por exemplo, traçando-se as diagonais do pentágono, obtemos um polígono estrelado que permite estabelecer a relação entre o comprimento da diagonal e o lado do pentágono:

Proposição:

”Se  $d$  é a diagonal do pentágono regular e  $L$  é o seu lado, então  $\frac{d}{L} = \phi$  ( a razão áurea).”

Usando este fato, que será provado mais abaixo, podemos justificar a construção do pentágono por meio de dobraduras. nessa construção, a diagonal do pentágono é igual à largura da folha de papel.

Se  $|AB|$  é a largura da folha de papel e  $P$  é um ponto tal que  $\frac{|AB|}{|AP|} = \phi$  então segue da construção que  $|AP| = |SR|$ .

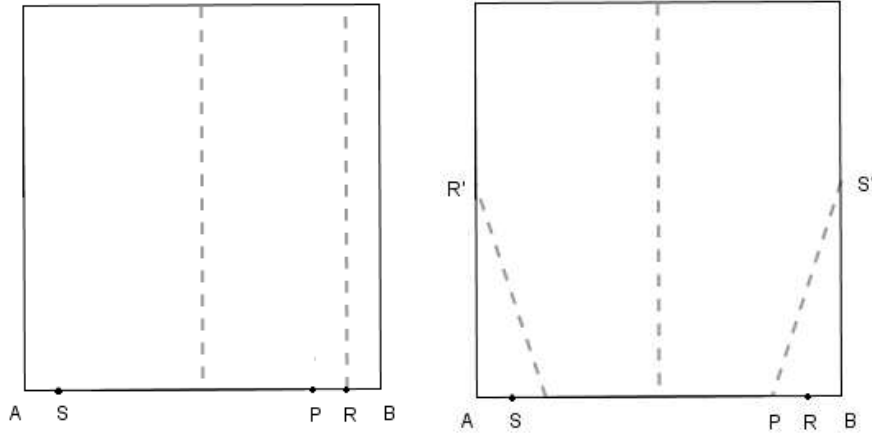
Portanto,  $\frac{|AB|}{|SR|} = \phi$  ou seja,  $|SR|$  é o lado do pentágono de diagonal igual a  $|AB|$ .

Os demais passos são justificados pela propriedade da reflexão.

A primeira reflexão leva o vértice  $R$  em um vértice  $R'$  do pentágono situado na borda lateral esquerda da folha de papel e a segunda reflexão (que é simétrica em relação à mediatriz de  $\overline{AB}$  leva o vértice  $S$  sobre um vértice  $S'$  do pentágono situado na borda lateral direita da folha.

O segmento  $\overline{R'S'}$  é uma diagonal do pentágono.

O quinto vértice,  $O$ , está na mediatriz de  $\overline{AB}$  que é também a mediatriz de  $\overline{O'S'}$  e, portanto,  $|S'O| = |R'S|$ .



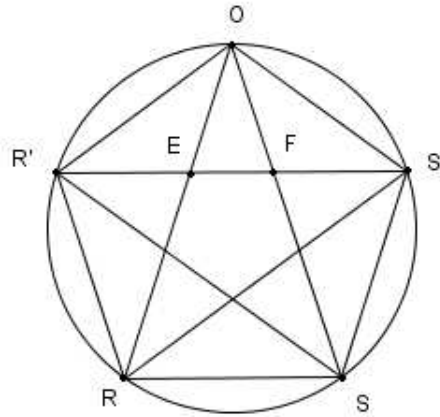
Passemos à prova da Proposição:

Um pentágono regular de vértices  $OS'RSR'$

Tracemos a circunferência circunscrita ao pentágono, e as diagonais  $\overline{R'S'}$ ,

$\overline{OS}$ ,  $\overline{OR}$ . Denotemos  $E = \overline{OS} \cap \overline{R'S'}$  e

$F = \overline{OR} \cap \overline{R'S'}$ .



Sabe-se que numa circunferência  $\gamma$ , ângulos com vértices em  $\gamma$  que intersectam a circunferência em arcos iguais são congruentes. Logo,

$$\angle OR'S' = \angle OSR = \angle R'OS.$$

Portanto, o triângulo  $\triangle R'EO$  é isósceles, com  $|ER'| = |EO|$ .

Pela simetria da figura, temos  $|OE| = |OF|$ . De fato, como  $\angle OFR' = \angle OFS'$ , o triângulo  $\triangle OEF$  é isósceles e  $|OE| = |OF|$ .

Além disso, segue da propriedade dos ângulos externos de um triângulo, que  $\angle OEF = 2\angle R'OE$  e como  $\angle OEF = \angle OFE$  e assim o triângulo  $\triangle OR'F$  é isósceles e semelhante ao triângulo  $\triangle OEF$  (pelo caso (AAA)).



Portanto  $|R'E| + |EF| = |R'O| = L$  (lado do pentágono).

Agora, usando a semelhança dos triângulos  $\triangle OEF$  e  $\triangle OR'F$  obtemos a razão áurea do seguinte modo:

Se  $m = |R'E|$  e  $n = |EF|$  então:

$$\frac{m+n}{m} = \frac{m}{n} = \phi$$

Finalmente, observe que  $m+n = L$  e que a diagonal  $d$  mede  $2m+n$ .

De modo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{L} &= \frac{2m+n}{m+n} = \frac{2\phi+1}{\phi+1} \\ &= 1 + \frac{\phi}{1+\phi} = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

### 13) Trisecção de um ângulo agudo ( H. Abe):

Essa construção aparece como problema sugerido no número 65 da Revista do Professor de Matemática, 2007.

Talvez seja interessante iniciar fazendo a construção para o caso do ângulo reto.

Evidentemente há modos muito mais simples de obter um ângulo de 30 graus, e podemos propor como exercício de aplicação de construções anteriores ( Bissetriz e Triângulo Equilátero ) mas o nosso objetivo é entender a construção neste caso particular. Aliás, este é o princípio geral a ser adotado nessas atividade, sempre que possível partir de um caso mais simples e tentar generalizar a construção.

Seja  $\angle CAR$  um ângulo reto.

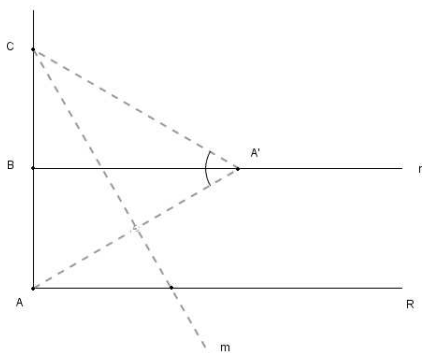
Obtenha  $n$  a mediatriz do segmento  $AC$ . Seja  $B = AC \cap n$  o ponto médio de  $AC$ .

A reflexão do ponto  $A$  sobre a reta  $n$  por uma dobra que passa por  $C$ , define um ponto  $A'$  que satisfaz:

$$|AC| = |A'C|.$$

E pela propriedade dos ângulos alternos internos em retas paralelas, temos:

$$\angle AA'B = \angle A'AR$$



Como  $|CB| = |AB|$ , os triângulos  $\triangle CBA'$  e  $\triangle ABA'$  são congruentes (LAL). Portanto  $\angle CA'B = \angle AA'B$ .

Além disso, por construção, o triângulo  $\triangle ACA'$  é isósceles, segue-se que  $\angle CAA' = \angle AA'C$  que mede o dobro do ângulo  $\angle A'AR$ . Por conseguinte, o segmento  $\overline{AA'}$  tri-secciona o ângulo reto  $\angle CAR$ .

Passemos agora à justificativa da tri-secção de um ângulo agudo  $\angle RAS$ :

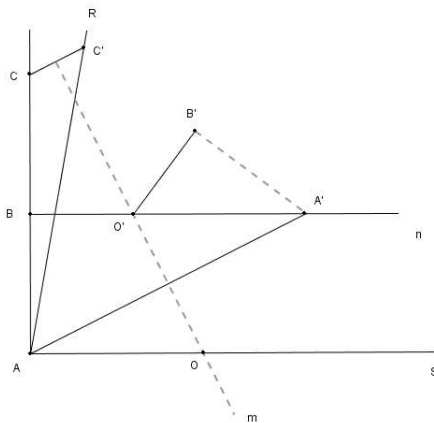
Iniciamos com a obtenção da perpendicular  $\overline{AC}$  à semi-reta  $\overrightarrow{AS}$  e de sua mediatriz que denotamos por  $n$ .

Escolhendo uma dobra conveniente  $m$ , refletimos simultaneamente  $A$  sobre  $n$  e  $C$  sobre a semi-reta  $\overrightarrow{AR}$ .

Denotemos por  $A', B'$  e  $C'$  as imagens dos pontos  $A, B$  e  $C$  por essa primeira dobradura.

Sejam  $O$  e  $O'$  os pontos de intersecção da dobra  $m$  com as semi-retas  $\overrightarrow{AS}$  e  $n$  respectivamente.

Veja a figura:



Pela propriedade da reflexão  $|A'C'| = |AC|$ ,  $|A'B'| = |AB| = |BC| = |B'C'|$

Seja  $n_1$  a imagem de  $n$ . É claro que  $n_1$  passa por  $O'$  e por  $B'$ , o problema que trataremos agora, é verificar que os pontos  $A, O'$  e  $B'$  são colineares.

De fato, como  $BB' \parallel AA'$  e  $|A'B'| = |AB|$ , temos um trapézio isósceles de vértices  $ABB'A'$ .

A dobra  $m$  é mediatriz das bases  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$ , portanto, as diagonais do trapézio se intersectam em  $m$ . Ou seja,  $\overline{AB'} \cap \overline{A'B} = O'$ , o que implica que  $A, O'$  e  $B'$  são colineares.

