Indução Matemática

por

Milton Procópio de Borba

Resumo

Situações (ver Situações 2-5 feitos no Maple):

1) Todo número natural é menor do que 1.000.000.
2) Se $n \in$ N, então $n^2 - n + 41$ é primo (vale até $n = 40$).
3) Se n é inteiro positivo, então $991n^2 + 1$ não é quadrado perfeito.
   (Falha para N = 12 055 735 790 331 359 447 442 538 767, mas vale para todos os números inteiros positivos menores que N)
4) A soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.
5) Todo número par, maior do que 2, é a soma de dois números primos.
   (Conjectura de Goldbach, válida para todos os pares menores que $4 \cdot 10^{18}$)
6) A equação $x^n + y^n = z^n$ só tem solução (x, y, z) inteira se $n = 2$.
   (Último teorema de Fermat enunciado em 1637 pelo francês Pierre de Fermat e provado só em 1995 pelo inglês Andrew Wiles)

Princípio de Indução Matemática – PIM

Seja $P(n)$ uma sentença aberta em $n \in$ N. Suponha que

(i) $P(1)$ é verdadeira, e

(ii) para todo $k \in$ N, com $k \geq 1$, se $P(k)$ é verdadeira, segue que $P(k + 1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural.

Princípio de Indução Matemática – Fraca

Seja $P(n)$ uma sentença aberta em $n \in$ N. Suponha que

(i) $P(n_o)$ é verdadeira para algum $n_o \in$ N, e

(ii) para todo $k \in$ N, com $k \geq n_o$, se $P(k)$ é verdadeira, segue que $P(k + 1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo n natural $n \geq n_o$

Princípio de Indução Matemática – Forte

Seja $P(n)$ uma sentença aberta em $n \in$ N. Suponha que

(i) $P(n_o)$ é verdadeira para algum $n_o \in$ N, e

(ii) para todo $k \in$ N, com $k \geq n_o$, se $P(j)$ é verdadeira para $n_o \leq j \leq k$, segue que $P(k + 1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo n natural $n \geq n_o$

Exemplos:

1) $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2) Se $x \in$ R, $x \geq -1$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, para todo inteiro positivo n.

Exercícios

Prove, por indução em n, que

1) $Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.
2) $1 + 3 + 5 + \cdot\cdot\cdot + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \geq 1$.
3) $1 + 2^1 + 2^2 + \cdot\cdot\cdot + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.
4) $4^n - 1$ é divisível por 3, para todo $n \geq 1$.
5) $n^3 - n$ é divisível por 6, para todo $n \geq 6$.
6) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, para todo $n \geq 1$.
7) $C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para todo $n \geq 1$.
8) $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
9) $n^2 < 2^n$, para todo $n \geq 5$.
10) $5^n + 2.11^n$ é divisível por 3, para todo $n \geq 1$.
11) Qualquer valor de postagem igual ou maior que 12 reais pode ser formado usando exclusivamente selos de 4 e de 5 reais.

Encontre a fórmula "fechada" para

1) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$
2) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
3) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n}\right)$