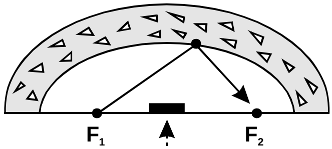
d) Sob uma abóboda elíptica os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco, não obstante serem praticamente inaudíveis na região intermediária aos dois focos.

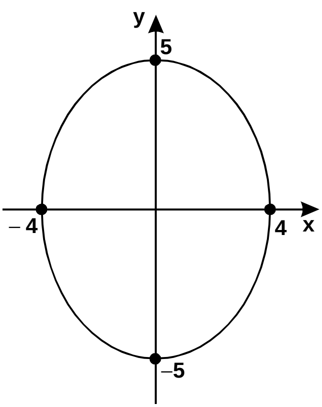


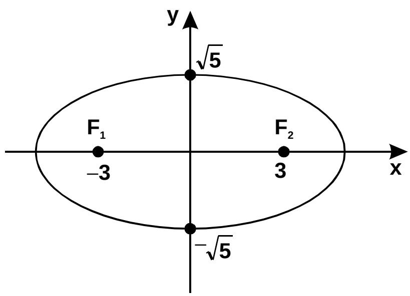
e) O mais portentoso monumento arquitetônico de Roma antiga foi o Coliseu. A planta baixa possuía a forma elíptica, cujo eixo maior tinha 188 m e o menor 156 m. Começou a ser construído em 72 por Vespasiano e foi concluído em 82 por Tito. A cobertura móvel, à altura de 85 m, era sustentada por um sistema inédito de tirantes, acionada em caso de chuva para proteger seus 40.000 espectadores. Diante da tribuna imperial, os garbosos gladiadores romanos desfilavam antes da luta e proferiam em alto e bom som: *Ave, Caesar, morituri te salutant* (Salve, César, os que vão morrer te saúdam).

Exercícios

"As paixões são loucas; porém, não precisam ser burras.
Alberto Goldin (n.1940), psicanalista argentino.

01. Dê as equações das elipses cujos gráficos são representados abaixo:





Resp.: a) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$; b) $\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{y^2}{5}=1$

02. Calcular a distância focal de uma elipse cujo eixo maior mede 10 e cujo eixomenor mede 8.

Resp.: $2c = 6$

03. Equação canônica da elipse com centro na origem, eixo focal sobre o eixo y e cujamedida do eixomaior é 5 e do eixomenor é 2.

Resp.: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

04. Calcular a excentricidade da elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$.

Resp.: $\dfrac{3}{5}$

SUGESTÃO:

Calcule inicialmente a equação canônica, dividindo todos os termos por 400:

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

05. A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semi-eixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol.

Resp.: 150 929 660 km
156 056 330 km

06. Determinar os pontos de intersecção da elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ com os eixos cartesianos.

Resp.: $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right); \left(\dfrac{5}{3}, 0\right); \left(0, \dfrac{5}{2}\right); \left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$

07. Pede-se a equação da elipse que passa pelos pontos (–2, 0), (2, 0) e (0, 1).

Resp.: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

08. Equação canônica da elipse com centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, que passa pelo ponto $A = (2\sqrt{2}, 1)$ e de excentricidade $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Resp.: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$

09. Calcular a equação canônica da elipse de centro na origem, focos no eixo das abscissas e sabendo que passa pelo ponto $A = (\sqrt{15}, -1)$ e seu semi-eixomenor é 2.

Resp.: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$

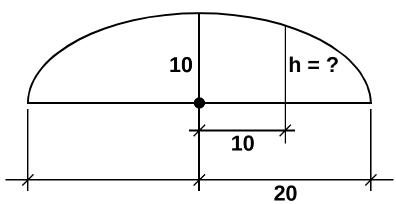
10. Um elipse tem o centro na origem, eixo focal sobre o eixo x, passa pelo ponto A = (1, 1) e tem um foco em $F = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$. Calcular a excentricidade da elipse.

Resp.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. Uma elipse tem os focos em $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ e excentricidade igual a 0,5. Forneça a sua equação e a sua área S (da Geometria: $S = \pi ab$).

Resp.: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ e $S = 18\sqrt{3}\,\pi$ u.a.

12. Um arco é uma semi-elipse e o eixo maior é o vão. Se este tiver 40 m e a flecha 10 m, calcular a altura do arco a 10 m do centro da base.



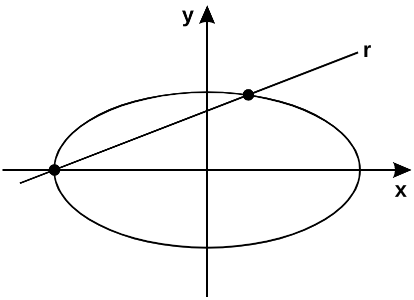
Resp.: $5\sqrt{3}$ m

Série B

13. Determinar o comprimento da corda que a reta $x = 4y - 4$ determina sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

Resp.: $\dfrac{8\sqrt{17}}{5}$

SUGESTÃO:



a) Para se obter os pontos de intersecção da elipse com a reta basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x = 4y - 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

donde se obtém

$P = (-4, 0)$ e

$P' = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

b) O comprimento da corda é a $d(P, P')$.

14. Determinar os pontos de intersecção da elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ com a reta $y = 2x + 3$.

Resp.: $P = (0, 3)$ e $P' = \left(\dfrac{-48}{25}, \dfrac{-21}{25}\right)$

15. Dois dos vértices de um polígono de 4 lados coincidem com os focos da elipse $9x^2 + 5y^2 = 1$ e os outros dois com os vértices do eixo menor elipse. Calcular a área do polígono.

Resp.: $\dfrac{4\sqrt{5}}{45}$ u.a.

16. Determinar a equação da elipse com centro na origem, focos sobre o eixo das abscissas e que passa pelos pontos $A = (2, 2)$ e $B = (2\sqrt{3}, 0)$.

Resp.: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$

SUGESTÃO:

a) Equação da elipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ①

b) $A = (2, 2) \in$ ① $\Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ ②

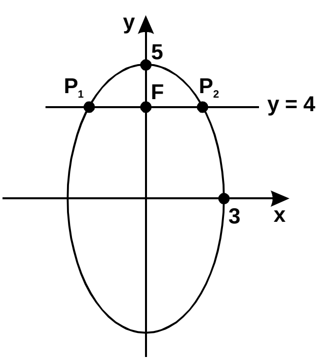
c) $B = (2\sqrt{3}, 0) \in$ ① $\Rightarrow \frac{12}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$ ③

Resolve-se: ② e ③

17. Similarmente à parábola, o *latus rectum* da elipse é uma das duas cordas focais da elipse e perpendiculares ao seu eixo maior. Então, dada a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, pede-se comprimento do *latus rectum*.

Resp.: $\frac{18}{5}$

SUGESTÃO:



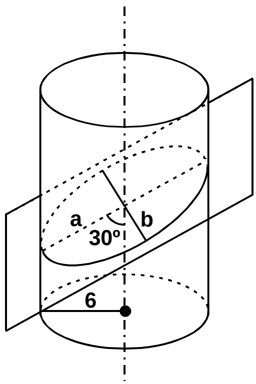
Um dos focos da elipse é $F = (0, 4)$.
Os pontos de intersecção da reta $y = 4$ com a elipse é $P_1 = \left(\frac{-9}{5}, 4\right)$ e $P_2 = \left(\frac{9}{5}, 4\right)$.

O comprimento é a $d(P_1, P_2)$.

18. Um cilindro de revolução tem por base um círculo de R = 6. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30º.

Resp.: 72πu.a.

SUGESTÃO:



Da figura:

a) $b = 6$

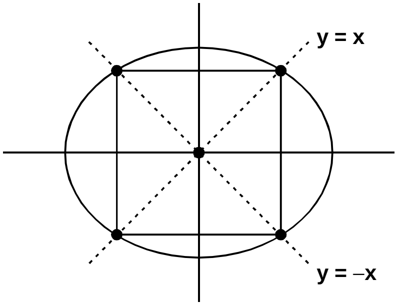
b) $a = \dfrac{6}{\text{sen } 30^{\circ}} = 12$

c) $S = \pi ab$

19. Determinar a área do quadrado inscrito na elipse $9x^2 + 16y^2 = 625$.

Resp.: 100 u.a.

SUGESTÃO:



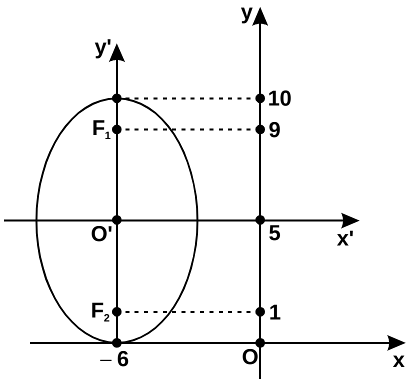
Os vértices do quadrado são obtidos pelas intersecções das retas $y = x$ e $y = -x$ com a elipse.

Exercícios

"A matemática vista com justeza, possui não apenas verdade, mas suprema beleza – uma beleza fria e austera, como só a grande arte pode mostrar."
Bertrand Russel (1872-1970), filósofo e matemático inglês.

01. Dada a equação da elipse $\dfrac{(x+6)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{25}=1$, pede-se as coordenadas dos focos, do centro e o respectivo gráfico.

Resp.:



$O' = (-6, 5)$
$F_1 = (-6, 9)$
$F_2 = (-6, 1)$

02. Obter a equação da elipse com centro em $O' = (8, -2)$, com $b = 1$ e $c = \sqrt{3}$.

Resp.: $\dfrac{(x-8)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{1}=1$

03. Determinar as coordenadas dos focos da elipse
$\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$

Resp.: $F_1 = (3+\sqrt{3}, -1)$ e $F_2 = (3-\sqrt{3}, -1)$

04. Equação da elipse com focos em (–2, 3) e (6, 3) e vértices em (–3, 3) e (7, 3).

Resp.: $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

05. Obter a equação da elipse cujos vértices são $A_1 = (1, 3)$; $A_2 = (1, -7)$; $B_1 = (-2, -2)$ e $B_2 = (4, -2)$.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

06. Calcular a equação da elipse de centro em (4, 2) e tangente aos eixos coordenados, sabendo que os eixos da elipse são paralelos aos referidos eixos cartesianos.

$$\text{Resp.: } \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

07. Qual a equação do conjunto de ponto P = (x, y) cuja soma das distâncias a $F_1 = (1, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$ é 5?

$$\text{Resp.: } 84x^2 + 100y^2 - 336x - 189 = 0$$

SUGESTÃO:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 5$$

Efetuando tem-se a resposta.

08. Determinar as coordenadas do centro e a equação canônica da elipse $4x^2 + y^2 - 40x - 12y + 120 = 0$.

$$\text{Resp.: } O' = (5, 6) \text{ e } \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

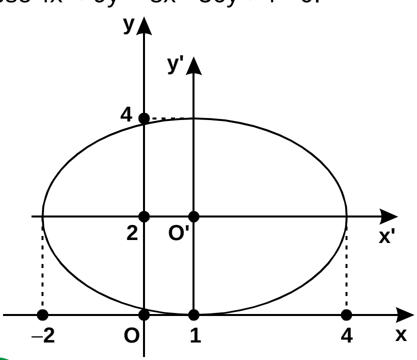
09. Achar a equação canônica e as coordenadas dos focos da elipse $4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$.

$$\text{Resp.: } \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{12} = 1$$

$$F_1 = (4, -2 + \sqrt{3}) \text{ e } F_2 = (4, -2 - \sqrt{3})$$

10. Construir o gráfico da elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Resp.:



Série B

"Ter problemas na vida não é ter vida infeliz."
Da música "Pais Paraplégicos", de Padre Zezinho, scj.

11. O ponto B = (3, –11) é um dos extremos do eixo menor de uma elipse cujos focos estão sobre a reta y + 6 = 0. Pede-se a equação da elipse conhecendo-se ainda a sua excentricidade igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Resp.: $\frac{(x-3)^2}{50}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

12. Um ponto P = (x, y) se desloca de modo que a soma de suas distâncias aos pontos (2, – 4) e (2, 2) é 10. Deduzir a equação do lugar geométrico descrito.

Resp.: $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$

9. EQUAÇÃO DA ELIPSE CUJO CENTRO É O' = (x_o, y_o) E CUJOS EIXOS NÃO SÃO PARALELOS AOS EIXOS COORDENADOS.

Reiteramos que a existência do termo em xy na equação de uma elipse indica que os eixos da elipse são oblíquos aos eixos cartesianos. Faz-semister a rotação, além da translação.

Exercício Resolvido

"O homem nunca sabe do que é capaz até ser obrigado a tentar."
Charles Dickens (1812-1870), escritor inglês.

Dada a elipse de equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y = 0$, pede-se o centro, a equação canônica e o gráfico.

RESOLUÇÃO:

a) Ordem das transformações:

$$B^2-4AC=(6)^2-4(5)(5)\neq 0 \quad \begin{cases}1)\ \text{translação}\\ 2)\ \text{rotação}\end{cases}$$

b) Translação:

Substituindo as fórmulas de translação na equação dada:

$$5(x_o+x')^2+6(x_o+x')(y_o+y')+5(y_o+y')^2-4(x_o+x')+$$
$$+4(y_o+y')=0 \qquad (1)$$