Exercícios

"Gasta-se menos tempo fazendo a coisa certa, do que explicando porque a fizemos errada."
H. W. Longfellow

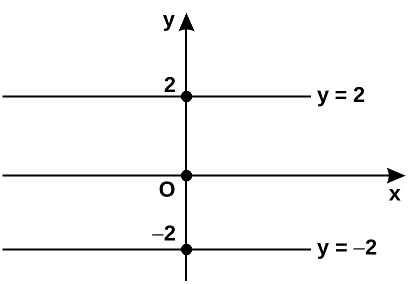
01. Pede-se a soma das assertivas verdadeiras:
01) A superfície quádrica $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$ é simétrica ao plano cartesiano xz;
02) A superfície $x^3 + y - 3z = 0$ é simétrica em relação à origem;
04) A superfície quádrica $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$ passa pela origem, é simétrica em relação aos planos xz e xy e em relação ao eixo x;
08) A superfície quádrica $2x^2 + 3y^2 - 2z^2 - 4 = 0$ não passa pela origem e é simétrica em relação aos eixos e planos coordenados e em relação à origem;
16) A equação $x^2 - y^2 = 2$ representa no E^3 uma hipérbole;
32) Toda superfície cilíndrica é uma quádrica;
64) A superfície quádrica $y^2 + z^2 = 2x$ é simétrica em relação aos planos xz e xy, em relação ao eixo x e passa pela origem.

Resp.: 79 (V, V, V, V, F, F, V)

02. Verificar se os pontos A = (1, 1, 0) e B = (1, 1, 3) pertencem à superfície quádrica S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z - 3 = 0$.

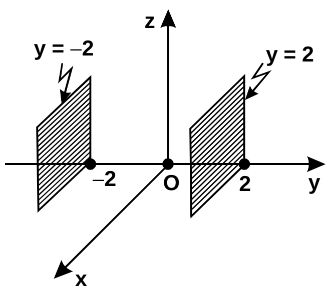
Resp.: $A \in S$; $B \notin S$.

03. Representar no E^2 e no E^3 a equação $y^2 - 4 = 0$.
Resp.:
a) no E^2



(duas retas paralelas)

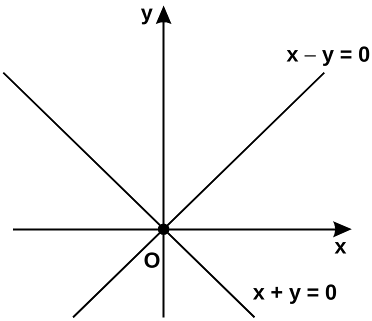
b) no E^3



(dois planos paralelos)

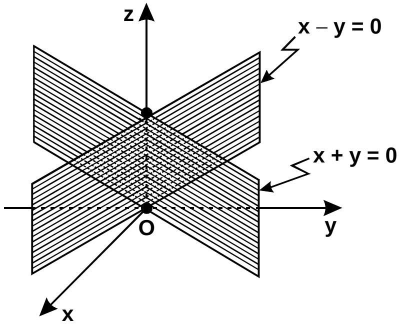
04. Representar no E^2 e no E^3 a equação $x^2 - y^2 = 0$.
Resp.:

a) no E^2



(duas retas bissetrizes dos quadrantes)

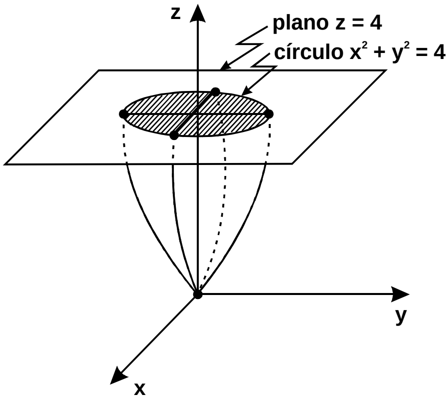
b) no E^3



(dois planos bissetores dos oitantes)

05. Identificar a curva $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$

Resp.: Para $z = 4$ tem-se $x^2 + y^2 = 4$, que representa um círculo de $R = 2$ no plano $z = 4$.



OBSERVAÇÃO:
A equação $z = x^2 + y^2$ representa umparabolóide conforme ilustra a figura acima.

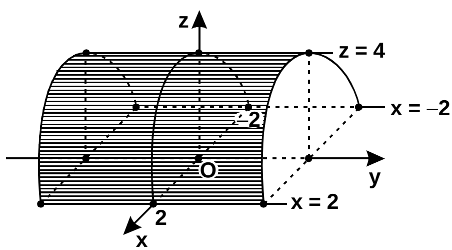
2.Dada a superfície quádrica $\mathbf{x^2 + z - 4 = 0}$, calcular:
a) **as interseções com os eixos cartesianos:**
Resolução:
• com o eixo x $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
• com o eixo y $\Rightarrow$ não há interseção
• com o eixo z $\Rightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$

b) **os traços nos planos coordenados:**
• no plano xy $(z = 0) \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$ retas de equações $x = 2$ e $x = -2$
• no plano xz $(y = 0) \Rightarrow$ parábola $x^2 = 4 - z$ de vértice $V = (0, 0, 4)$ e concavidade voltada para baixo.
• no plano yz $(x = 0) \Rightarrow$ reta $z = 4$.

c) **a condição de existência (domínio)**
A superfície quádrica $x^2 = 4 - z$ só tem existência para $4 - z \geq 0$ ou $z \leq 4$.

d) **a simetria:** A quádrica $x^2 + z - 4 = 0$ é simétrica em relação aos planos xz e yz e emrelação ao eixo z.

e) **a figura** (denominada superfície cilíndrica parabólica)**:**



Exercícios

> ***“El amor es la sabedoria del tonto y la locura del sabio.”***
> *Provérbio espanhol*

01. Obter os pontos de interseção da quádrica $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 6y + z + 6 = 0$ (esfera) com o eixo das abscissas.

Resp.: (2, 0, 0) e (3, 0, 0)

02. Dada a equação da superfície quádrica $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 7y - 4z - 21 = 0$, identificar a equação do traço no plano $y = 2$.

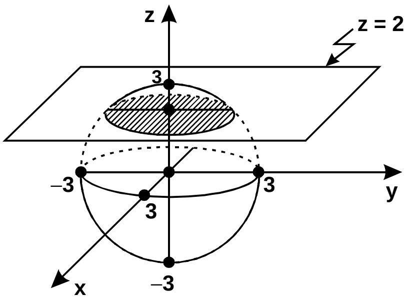
Resp.: Equação do traço no plano $y = 2$: $x^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$, que representa uma circunferência de $C = (-1, 2, 2)$ e $R = 2$.

03. Achar a equação do traço da quádrica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (esfera de $R = 3$):

a) no plano $z = 2$;
b) no plano xy. Representar graficamente.

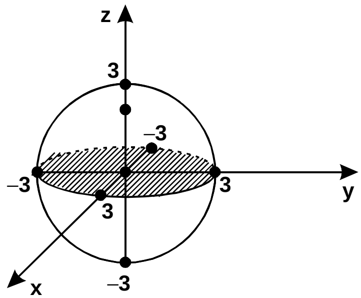
Resp.

a)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{(circunf.)}$$

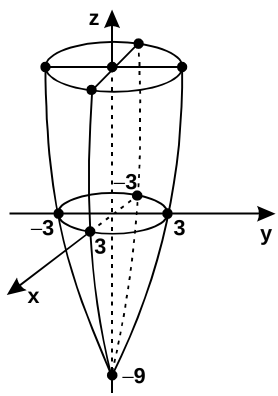
b)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{(circunf.)}$$

04. A figura ao lado representa um parabolóide (superfície quádrica). Considerando as interseções com os eixos e planos cartesianos, bem como o domínio, a sua equação **pode** ser:

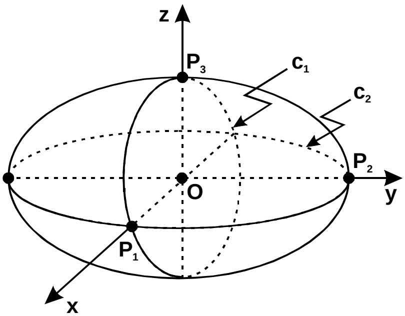
a) $x^2 + y^2 - z + 9 = 0$
b) $x^2 + 2y^2 - z - 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 - z - 9 = 0$
d) $2x^2 + y^2 - z - 9 = 0$



Resp.: c

05. Tem-se abaixo uma superfície quádrica de equação

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$ (elipsóide). Pedem-se:



a) as coordenadas dos pontos P_1, P_2 e P_3;
b) a equação da curva c_1;
c) a equação da curva c_2;
d) o estudo da simetria.

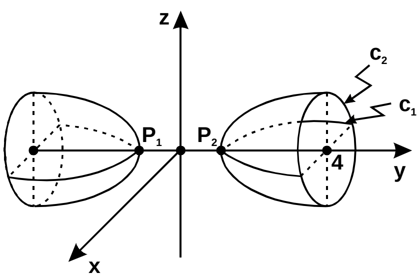
Resp.:
a) $P_1=(2, 0, 0)$; $P_2=(0, 5, 0)$ e $P_3=(0, 0, 3)$;

b) $c_1\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 & \text{(elipse no plano xz);}\\ y=0\end{cases}$

c) $c_2\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1 & \text{(elipse no plano xy);}\\ y=0\end{cases}$

d) a superfície é simétrica em relação à origem; também o é em relação aos eixos e planos cartesianos.

06. Figura-se no presente exercício uma superfície quádrica de equação $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$ (hiperbolóide de duas folhas). Pedem-se:



a) as coordenadas de P_1 e P_2;
b) a equação da curva c_1;
c) a equação da curva c_2;
d) a simetria em relação aos eixos e planos coordenados e à origem.

Resp.:

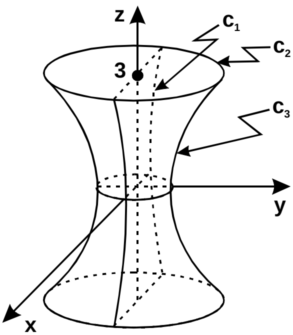
a) $P_1 = (0, -\sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$;

b) $c_1 \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (hipérbole no plano xy);

c) $c_2 \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ (elipse no plano $y = 4$);

d) a superfície é simétrica em relação aos eixos coordenados, planos coordenados e à origem.

07. No presente exercício figura-se uma superfície cognominada hiperbolóide de uma folha, cuja equação é $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$. Solicitam-se:



a) os pontos de interseção com os eixos x, y e z;
b) a equação da curva c_1;
c) a equação da curva c_2;
d) a equação da curva c_3;
e) o estudo da simetria.

Resp.:

a) (2, 0, 0); (–2, 0, 0); (0, 2, 0); (0, –2, 0); não há interseção com o eixo z;

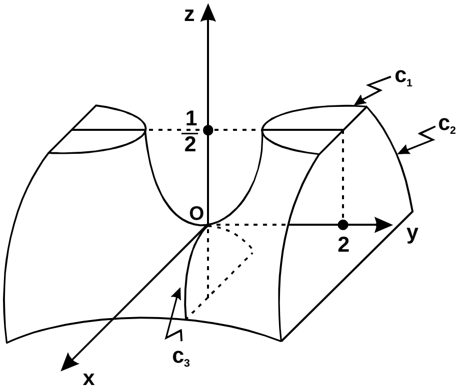
b) $c_1 \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ (hipérbole no plano xz);

c) $c_2 \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = 3 \end{cases}$ (círculo de $R = 2\sqrt{2}$ no plano $z = 3$);

d) $c_3 \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ (hipérbole no plano yz);

e) A quádrica é simétrica em relação à origem. Também o é em relação aos eixos e planos cartesianos.

08. Abaixo representa-se a quádrica $z = -\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4}$ (parabolóide hiperbólico ou sela de cavalo). Pedem-se:



a) a equação da curva c_1;
b) a equação da curva c_2;
c) a equação da curva c_3.

Resp.:

a) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left(\text{hipérbole no plano } z = \dfrac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x^2 = -z + 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (parábola de concavidade voltada para baixo e $V = (0, 2, 1)$)

c) $\begin{cases} x^2 = -z \\ y = 0 \end{cases}$ (parábola de concavidade voltada para baixo e $V = (0, 0, 0)$)

TEMPOS DE GLOBALIZAÇÃO

Certo dia, ao querer respirar os ares do mundo, o rato saiu de seu esconderejo. Após um tempo de silêncio absoluto, ouviu um latido. E pensou: "se há cachorro, é porque o gato anda longe...". Qual o quê! Mal olhou para o lado e só ouviu o miado valente do gato abocanhando-lhe a um só golpe. Ainda assim, o rato conseguiu perguntar:

– Desde quando você é bicho que late?

A resposta do gato foi contundente:

– Nestes tempos de globalização, quem não fala duas línguas, morre de fome...