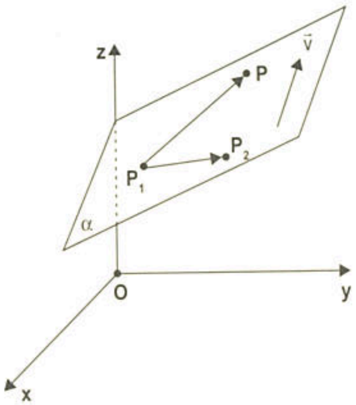
O PLANO É INDIVIDUALIZADO POR DOIS PONTOS E POR UM VETOR



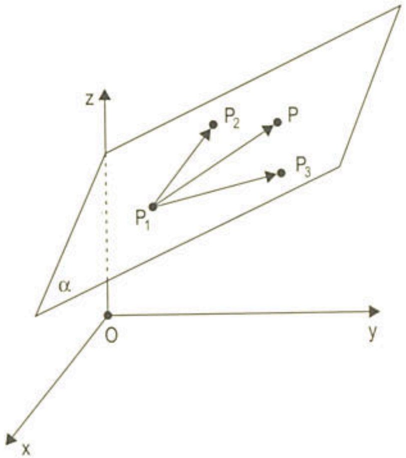
Dados:

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$\vec{v} = \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

O plano α é passante por P_1 e P_2 e é paralelo ao vetor $\vec{v}$. Um ponto genérico $P = (x, y, z)$ pertence ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_1)$, $(P_2 - P_1)$ e $\vec{v}$ forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(II)}$$

O PLANO É DEFINIDO POR TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES



Dados:

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

O plano α é determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3. Um ponto genérico $P = (x, y, z)$ pertence ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_1)$, $(P_2 - P_1)$ e $(P_3 - P_1)$ forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(III)}$$

A resolução de cada determinante representado por (I), (II) ou (III) conduz a uma equação linear a três variáveis:

$$ax + by + cz + d = 0$$

cognominada **equação geral do plano**.

Exercícios

"Não basta destruir o que sobra; é necessário construir o que falta."

Anônimo.

01. Equação geral do plano que contém o ponto $A = (3, 0, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$.

Resp.: $2x - y + 3z - 9 = 0$

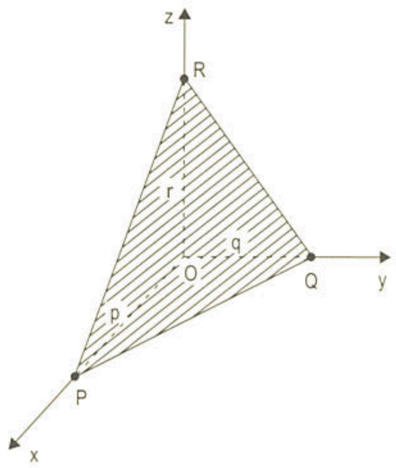
02. Achar a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$.

Resp.: $y - 2 = 0$

03. Obter a equação do plano que contém os pontos $A = (3, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (3, 2, 2)$.

Resp.: $x + y - 2z - 1 = 0$

4. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DO PLANO



O plano

α: $ax + by + cz + d = 0$ com $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \neq 0$ corta os eixos cartesianos em três pontos distintos P, Q e R, que determinam os três segmentos OP, OQ e OR. Indicaremos por p, q e r, respectivamente, as medidas desses segmentos.

$$\left.\begin{aligned} P &= (p,\ 0,\ 0) \in \alpha \Rightarrow ap + d = 0 \Rightarrow p = \frac{-d}{a} \\ Q &= (0,\ q,\ 0) \in \alpha \Rightarrow bq + d = 0 \Rightarrow q = \frac{-d}{b} \\ R &= (0,\ 0,\ r) \in \alpha \Rightarrow cr + d = 0 \Rightarrow r = \frac{-d}{c} \end{aligned}\right\} \text{①}$$

Voltemos à equação de α:

$ax + by + cz = -d$

dividindo por $(-d)$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

ou

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1 \qquad \text{②}$$

Substituindo ① em ②:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

denominada **equação segmentária** do plano, por interceptar os eixos x, y e z em segmentos p, q e r.

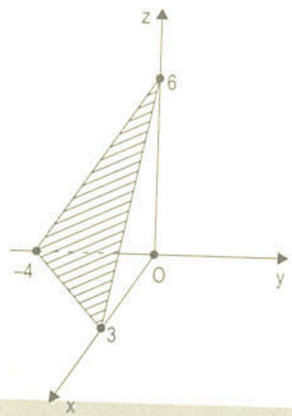
Exemplo:

Obter a equação segmentária do plano $4x - 3y + 2z - 12 = 0$.

Solução:

Plano dado

$4x - 3y + 2z = 12$



$$\frac{4x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{2z}{12} = 1 \text{ ou}$$

$$\boxed{\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{6} = 1}$$

Exercícios

"Quem aos 20 anos não é de esquerda, não tem coração; quem continua sendo aos 40, não tem cabeça."

Autoria incerta.

01. Obter a equação segmentária do plano α: $2x + 3y - 4z - 24 = 0$.

Resp.: $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{-6} = 1$

02. Obter os pontos de interseção do plano $x + 2y - 4z + 5 = 0$ com os eixos coordenados.

Resp.: $A = (-5,\ 0,\ 0)$; $B = \left(0, -\frac{5}{2},\ 0\right)$; $C = \left(0,\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$

03. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 2, -1)$ e que corta os eixos coordenados em segmentos iguais.

Resp.: $x + y + z - 2 = 0$

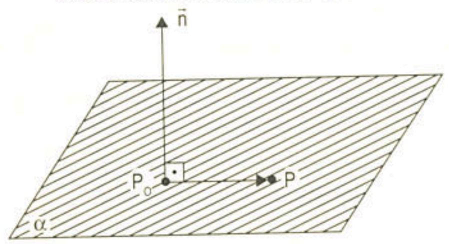
04. Equação geral do plano que intercepta os eixos y e z em segmentos de comprimento 2 e 2 e passa pelo ponto $A = (1, 3, -3)$.

Resp.: $2x + y + z - 2 = 0$

05. Determinar o volume do tetraedro limitado pelo plano $3x + 2y + 2z - 6 = 0$ e pelos planos coordenados.

Resp.: 3u.v.

5. EQUAÇÃO DO PLANO QUE PASSA POR UM PONTO E ORTOGONAL A UM VETOR



Queremos a equação do plano α que passa pelo ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e seja ortogonal ao vetor $n = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Observe que, aqui, $\vec{n}$ é o **vetor normal** a um plano e não necessariamente unitário.

Dedução:

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico de α. Então:

$(P - P_o) = (x - x_o)\,\vec{i} + (y - y_o)\,\vec{j} + (z - z_o)\,\vec{k}$ e

$n = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Os vetores $(P - P_o)$ e $\vec{n}$ são ortogonais; logo, seu produto interno deve ser nulo:

$(P - P_o) \cdot \vec{n} = 0$

$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$

ou

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

ou ainda

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

Comparando com $\vec{n}$, verificamos que os coeficientes a, b e c da equação geral de um plano são, nesta ordem, as coordenadas de um **vetor normal** a esse plano.

Exemplo:

Equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 3, 5)$ e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (2, 4, 6)$.

Solução:

a) Equação do plano
$\alpha: 2x + 4y + 6z + d = 0$

b) $A = (1, 3, 5) \in \alpha$
$2(1) + 4(3) + 6(5) + d = 0 \Rightarrow d = -44$

c) Resposta: $\alpha: 2x + 4y + 6z - 44 = 0$

Exercícios

"O poder é como violino: pega-se com a esquerda mas toca-se com a direita."

Anônimo.

01. Equação geral do plano que contém o ponto $P_o = (0, 1, 3)$ e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (3, 2, 5)$.

Resp.: $3x + 2y + 5z - 17 = 0$

Exercícios

"Importa muito hoje que o candidato a uma vaga no mercado de trabalho seja comunicativo, saiba trabalhar em grupo, tenha conhecimento de uma especialidade e seja capaz de tomar decisões."

Nilson José Machado (n. 1947), professor da USP, numa palestra em Curitiba.

01. Dado o plano α: $2x + 3y + z - 3 = 0$, pergunta-se se os pontos $A = (1, 1, -2)$ e $B = (2, 0, 1)$ pertencem a α.

Resp.: $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$.

02. Obter a equação do plano que passa por $P = (1, 2, 1)$ e $Q = (3, 1, -1)$ e seja paralelo ao eixo y.

Resp.: $x + z - 2 = 0$

03. Calcular a equação do plano passante por $P = (1, 3, 3)$ e paralelo ao plano xy.

Resp.: $z - 3 = 0$

04. Plano que contém o eixo x e o ponto $A = (1, 3, 3)$.

Resp.: $y - z = 0$

05. Equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 3, 0)$ e seja paralelo ao eixo x.

Resp.: $y + z - 3 = 0$

06. Achar m para que o ponto $A = (m, 1, 2)$ pertença ao plano $x + 2y - z + 5 = 0$.

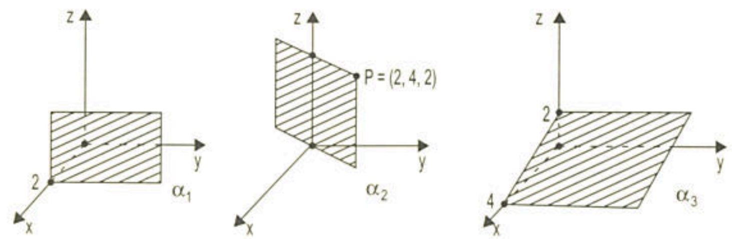
Resp.: $m = -5$

07. Nas figuras abaixo, determine as equações dos planos, sabendo-se que:

a) α_1 é paralelo ao plano yz;

b) α_2 passa por P e contém o eixo z;

c) α_3 é paralelo ao eixo y.



Resp.: a) α_1: $x - 2 = 0$; b) α_2: $2x - y = 0$; c) α_3: $x + 2z - 4 = 0$

01. Achar a equação do plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

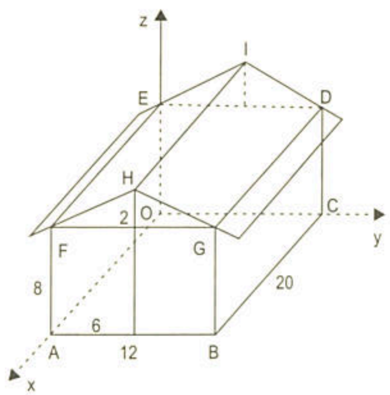
Resp.: $2x - y + 3z = 0$

Série B

"Certas escolas têm cheiro de morte por matarem a criatividade dos alunos."

Anônimo

02. (VISSOTO LEITE) A figura abaixo representa um galpão. Os números representam as dimensões do galpão. Determine:



a) equações dos planos que contêm os telhados e as paredes;

b) o volume do galpão.

Resp.: a) (EIFH) $y - 3z + 24 = 0$
(IHDG) $y + 3z - 36 = 0$
(ABFG) $x - 20 = 0$
(BCDG) $y - 12 = 0$
(OEAF) $y = 0$
(OEDC) $x = 0$

b) 2.160 u.v.