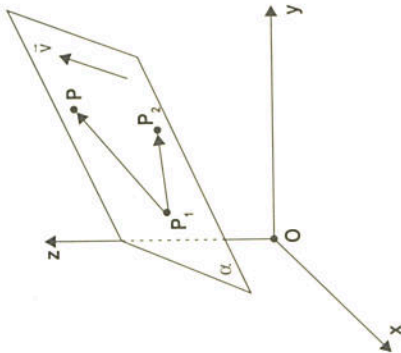


O PLANO É INDIVIDUALIZADO POR DOIS PONTOS E POR UM VETOR

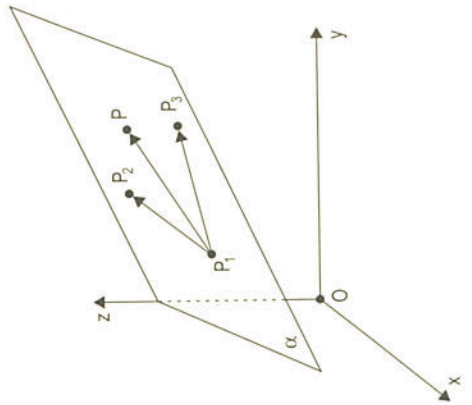


Dados:
 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
 $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
 $\vec{v} = \ell \vec{i} + m \vec{j} + n \vec{k}$

O plano α é passante por P_1 e P_2 e é paralelo ao vetor \vec{v} . Um ponto genérico $P = (x, y, z)$ pertence ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_1)$, $(P_2 - P_1)$ e \vec{v} forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(II)}$$

O PLANO É DEFINIDO POR TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES



Dados:
 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
 $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
 $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

O plano α é determinado pelos pontos P_1 , P_2 e P_3 . Um ponto genérico $P = (x, y, z)$ pertence ao plano α se, e somente se, os vetores $(P - P_1)$, $(P_2 - P_1)$ e $(P_3 - P_1)$ forem coplanares:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(III)}$$

A resolução de cada determinante representado por (I), (II) ou (III) conduz a uma equação linear a três variáveis:

$$ax + by + cz + d = 0$$

cognominada **equação geral do plano**.

Exercícios

"Não basta destruir o que sobra; é necessário construir o que falta."

Anônimo.

01. Equação geral do plano que contém o ponto $A = (3, 0, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$.

Resp.: ●●●●●●●●

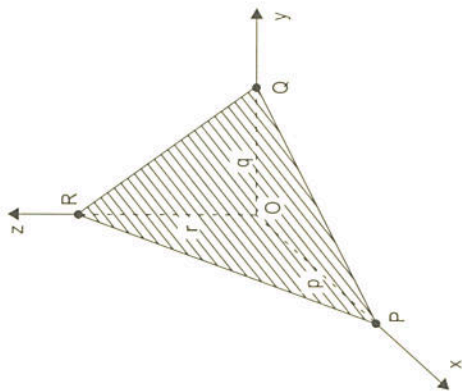
02. Achar a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, 2, 0)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$.

Resp. ●●●●●●●●

03. Obter a equação do plano que contém os pontos $A = (3, 0, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (3, 2, 2)$.

Resp. ●●●●●●●●

4. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DO PLANO



O plano

$\alpha: ax + by + cz + d = 0$ com $a, b, c, d \neq 0$ corta os eixos cartesianos em três pontos distintos P, Q e R, que determinam os três segmentos OP, OQ e OR. Indicaremos por p, q e r, respectivamente, as medidas desses segmentos.

$$\left. \begin{aligned} P = (p, 0, 0) \in \alpha &\Rightarrow ap + d = 0 \Rightarrow p = \frac{-d}{a} \\ Q = (0, q, 0) \in \alpha &\Rightarrow bq + d = 0 \Rightarrow q = \frac{-d}{b} \\ R = (0, 0, r) \in \alpha &\Rightarrow cr + d = 0 \Rightarrow r = \frac{-d}{c} \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

Voltemos à equação de α :

$$ax + by + cz = -d$$

dividindo por $(-d)$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

ou

$$\frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1 \quad \textcircled{2}$$

Substituindo $\textcircled{1}$ em $\textcircled{2}$:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

denominada **equação segmentária** do plano, por interceptar os eixos x, y e z em segmentos p, q e r.

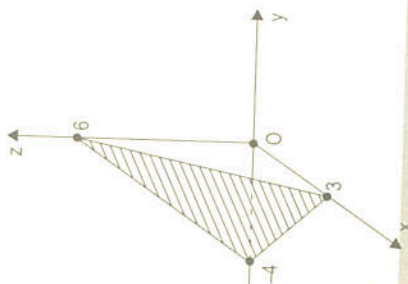
Exemplo:

Obter a equação segmentária do plano $4x - 3y + 2z - 12 = 0$.

Solução:

Plano dado

$$4x - 3y + 2z = 12$$



$$\frac{4x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{2z}{12} = 1 \text{ ou}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{6} = 1$$

Exercícios

"Quem aos 20 anos não é de esquerda, não tem coração; quem continua sendo aos 40, não tem cabeça."

Autoria incerta.

01. Obter a equação segmentária do plano $\alpha: 2x + 3y - 4z - 24 = 0$.

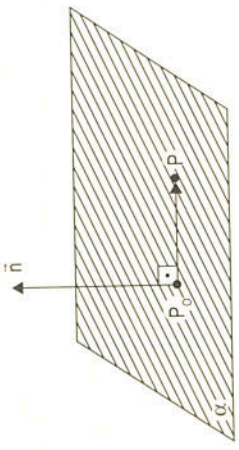
Resp.: $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} + \frac{z}{-6} = 1$

02. Obter os pontos de interseção do plano $x + 2y - 4z + 5 = 0$ com os eixos coordenados.

Resp.: $(-5, 0, 0)$, $(0, -2.5, 0)$, $(0, 0, 1.25)$

03. Determinar a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 2, -1)$ e que corta os eixos coordenados em segmentos iguais.
 Resp.: $x + y + z - 2 = 0$
04. Equação geral do plano que intercepta os eixos y e z em segmentos de comprimento 2 e 2 e passa pelo ponto $A = (1, 3, -3)$.
 Resp.: $2x + y + z - 2 = 0$
05. Determinar o volume do tetraedro limitado pelo plano $3x + 2y + 2z - 6 = 0$ e pelos planos coordenados.
 Resp.: 3u.v.

5. EQUAÇÃO DO PLANO QUE PASSA POR UM PONTO E ORTOGONAL A UM VETOR



Queremos a equação do plano α que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e seja ortogonal ao vetor $n = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
 Observe que, aqui, \vec{n} é o **vetor normal** a um plano e não necessariamente unitário.

Dedução:
 Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico de α . Então:
 $(P - P_0) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$
 $n = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Os vetores $(P - P_0)$ e \vec{n} são ortogonais; logo, seu produto interno deve ser nulo:

$$(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ou

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_d = 0$$

ou ainda

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

Comparando com \vec{n} , verificamos que os coeficientes a, b e c da equação geral de um plano são, nesta ordem, as coordenadas de um **vetor normal** a esse plano.

Exemplo:

Equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 3, 5)$ e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (2, 4, 6)$.

- Solução:
- a) Equação do plano
 $\alpha: 2x + 4y + 6z + d = 0$
- b) $A = (1, 3, 5) \in \alpha$
 $2(1) + 4(3) + 6(5) + d = 0 \Rightarrow d = -44$
- c) Resposta: $\alpha: 2x + 4y + 6z - 44 = 0$

Exercícios

"O poder é como violino: pega-se com a esquerda mas toca-se com a direita."
 Anônimo.

01. Equação geral do plano que contém o ponto $P_0 = (0, 1, 3)$ e seja ortogonal ao vetor $\vec{n} = (3, 2, 5)$.
 Resp. ●●●●●

Exercícios

"Importa muito hoje que o candidato a uma vaga no mercado de trabalho seja comunicativo, saiba trabalhar em grupo, tenha conhecimento de uma especialidade e seja capaz de tomar decisões."

Nilson José Machado (n. 1947), professor da USP, numa palestra em Curitiba.

01. Dado o plano $\alpha: 2x + 3y + z - 3 = 0$, pergunta-se se os pontos $A = (1, 1, -2)$ e $B = (2, 0, 1)$ pertencem a α .

Resp.: ●●●●●

02. Obter a equação do plano que passa por $P = (1, 2, 1)$ e $Q = (3, 1, -1)$ e seja paralelo ao eixo y .

Resp.: ●●●●●

03. Calcular a equação do plano passante por $P = (1, 3, 3)$ e paralelo ao plano xy .

Resp.: ●●●●●

04. Plano que contém o eixo x e o ponto $A = (1, 3, 3)$.

Resp.: ●●●●●

05. Equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $A = (0, 1, 2)$ e $B = (1, 3, 0)$ e seja paralelo ao eixo x .

Resp.: ●●●●●

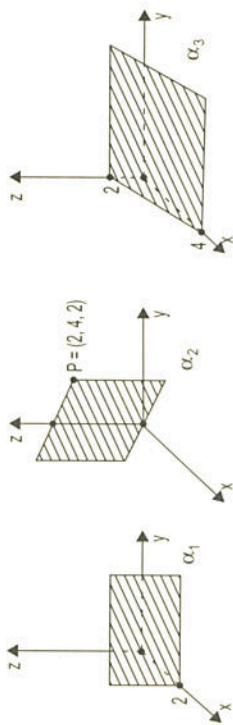
06. Achar m para que o ponto $A = (m, 1, 2)$ pertença ao plano $x + 2y - z + 5 = 0$.

Resp.: ●●●●●

07. Nas figuras abaixo, determine as equações dos planos, sabendo-se que:

a) α_1 é paralelo ao plano yz ;

- b) α_2 passa por P e contém o eixo z ;
c) α_3 é paralelo ao eixo y .



Resp.: ●●●●●

01. Achar a equação do plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

Resp.: ●●●●●

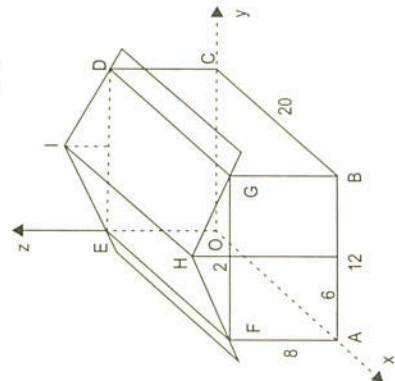
Série B

"Certas escolas têm cheiro de morte por matarem a criatividade dos alunos."

Anônimo

02. (VISSOTO LEITE) A figura abaixo representa um galpão. Os números representam as dimensões do galpão. Determine:

- a) equações dos planos que contêm os telhados e as paredes;
b) o volume do galpão.



Resp.: a) $\dots = 0$

b) $2 \dots$