Conjunto de Exercícios 2.1

1. Encontre o número de inversões em cada uma das seguintes permutações de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(a) (4 1 3 5 2) (b) (5 3 4 2 1) (c) (3 2 5 4 1) (d) (5 4 3 2 1) (e) (1 2 3 4 5) (f) (1 4 2 3 5)

2. Classifique cada uma das permutações do Exercício 1 como par ou ímpar.

Nos Exercícios 3–12, calcule o determinante.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$

13. Encontre todos os valores de λ para os quais $\det(A) = 0$.

(a) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

14. Classifique cada permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$ como par ou ímpar.

15. Use as respostas do Exercício 14 para construir uma fórmula para o determinante de uma matriz 4×4.

16. Use a fórmula obtida no Exercício 15 para calcular

$$\begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

17. Use a definição de determinante para calcular

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

18. Resolva em x.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

19. Mostre que o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta + \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

não depende de θ.

20. Prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

Discussão e Descoberta

21. Explique por que o determinante de uma matriz $n \times n$ com entradas inteiras deve ser um inteiro.

7. **(a)** $a \neq 0,\ b \neq 2$ **(b)** $a \neq 0,\ b = 2$ **(c)** $a = 0,\ b = 2$ **(d)** $a = 0,\ b \neq 2$

8. $x = \frac{5}{9}, y = 9, z = \frac{1}{3}$ 9. $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 10. $a = 2, b = -1, c = 1$

11. **(a)** $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $X = \begin{bmatrix} -\frac{113}{37} & -\frac{160}{37} \\ -\frac{20}{37} & -\frac{46}{37} \end{bmatrix}$

12. **(a)** $Z = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 11 \\ 14 & 10 & -26 \end{bmatrix} X$ **(b)** $\begin{aligned} z_1 &= -x_1 - 7x_2 + 11x_3 \\ z_2 &= 14x_1 + 10x_2 - 26x_3 \end{aligned}$

13. $m\,p\,n$ multiplicações e $m\,p\,(n-1)$ adições 15. $a = 1, b = -2, c = 3$

16. $a = 1, b = -4, c = -5$ 26. $A = -\frac{7}{5}, B = \frac{4}{5}, C = \frac{3}{5}$

29. **(b)** $\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ d & 0 & c^n \end{bmatrix}$, onde $d = \begin{cases} \dfrac{a^n - c^n}{a - c} & \text{se } a \neq c \\ na^{n-1} & \text{se } a = c \end{cases}$

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.1 [página 81]

1. **(a)** 5 **(b)** 9 **(c)** 6 **(d)** 10 **(e)** 0 **(f)** 2

2. **(a)** Ímpar **(b)** Ímpar **(c)** Par **(d)** Par **(e)** Par **(f)** Par

3. 22 4. 0 5. 52 6. $-3\sqrt{6}$ 7. $a^2 - 5a + 21$ 8. 0

9. -65 10. -4 11. -123 12. $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$

13. **(a)** $\lambda = 1, \lambda = -3$ **(b)** $\lambda = -2, \lambda = 3, \lambda = 4$ 16. 275

17. **(a)** $= -120$ **(b)** $= -120$ 18. $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$ 22. É igual a 0 se $n > 1$.

24. O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

25. O determinante é igual ao produto das entradas da diagonal.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.2 [página 84]

2. **(a)** -30 **(b)** -2 **(c)** 0 **(d)** 0 3. **(a)** -5 **(b)** -1 **(c)** 1

4. 30 5. 5 6. -17 7. 33 8. 39 9. 6 10. $-\frac{1}{6}$

11. -2 12. **(a)** -6 **(b)** 72 **(c)** -6 **(d)** 18

16. **(a)** $\det(A) = -1$ **(b)** $\det(A) = 1$ 17. $x = 0, -1, \frac{1}{2}$ 18. $x = 1, -3$

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 2.3 [página 89]

1. **(a)** $\det(2A) = -40 = 2^2 \det(A)$ **(b)** $\det(-2A) = -448 = (-2)^3 \det(A)$

2. $\det AB = -170 = (\det A)(\det B)$

4. **(a)** Invertível **(b)** Não-invertível **(c)** Não-invertível **(d)** Não-invertível

5. **(a)** -189 **(b)** $-\frac{1}{7}$ **(c)** $-\frac{8}{7}$ **(d)** $-\frac{1}{56}$ **(e)** 7

6. Se $x = 0$, a primeira e terceira linhas são proporcionais.
Se $x = 2$, a primeira e segunda linhas são proporcionais.

12. **(a)** $k = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ **(b)** $k = -1$