Araguatins - TO

Exercícios sobre Derivadas

Milton Borba

Turma 1ª fase de Licenciatura em Ciências Biológicas

I. EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE

Determine a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa indicada:

a) $f(x) = x^2 \quad x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad x = 2$

c) $f(x) = \sqrt{x} \quad x = 9$

d) $f(x) = x^2 - x \quad x = 1$

II. DERIVADAS POR DEFINIÇÃO

Calcule $f'(x)$ pela definição:

a) $f(x) = x^2 + x \quad x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} \quad x = 4$

c) $f(x) = 5x - 3 \quad x = -3$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad x = 1$

e) $f(x) = x^3$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

g) $f(x) = \sqrt{3x+4}$

Respostas:

I - a) $y = 4x - 4$ b) $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$ c) $x - 6y + 9 = 0$ d) $y = x - 1$

II - a) 3 b) $\dfrac{1}{4}$ c) 5 d) -1

e) $3x^2$ f) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ g) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

III. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Determine a derivada da função indicada:

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ $\quad f'(x) = -2x^3 + 2x^2 - x$

2) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = x^3 \cos x$ $\quad f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \text{sen} x$

4) $f(x) = x^3(2x^2 - 3x)$ $\quad f'(x) = 10x^4 - 12x^3$

5) $f(x) = \frac{2x+5}{4x}$ $\quad f'(x) = -\frac{5}{4x^2}$

6) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ $\quad f'(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\frac{2}{5}$

7) $f(x) = 2^{3x-1}$ $\quad f'(x) = 2^{3x-1}.3n2$

8) $f(x) = 3^x$ $\quad f'(x) = 3^x \ln 3$

9) $f(x) = \text{sen}(x^2)$ $\quad f'(x) = 2x.\cos(x^2)$

10) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

11) $f(x) = (x^2 + 5x + 2)^7$ $\quad f'(x) = 7(x^2 + 5x + 2)^6(2x + 5)$

12) $f(x) = \left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^5$ $\quad f'(x) = 5\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right)^4 . \frac{-1}{(2x+1)^2}$

13) $f(x) = \frac{1}{3}(2x^5 + 6x^{-3})^5$ $\quad f'(x) = \frac{10}{3}(2x^5 + 6x^{-3})^4.(5x^4 - 9x^{-4})$

14) $y = \ln(x^6 - 1)$ $\quad y' = \frac{6x^5}{x^6 - 1}$

15) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3 - 1}}$ $\quad y' = \frac{3x^2}{5\sqrt[5]{(x^3-1)^6}}$

16) $y = \cos(x^3 - 4)$ $\quad y' = -3x^2 \text{sen}(x^3 - 4)$

17) $y = (x^3 - 6)^5$ $\quad y' = 15x^2(x^3 - 6)^4$

18) $y = e^{x^2-3x}$ $\quad y' = (2x-3)\, e^{x^2-3x}$

IV. APLICAÇÃO (taxas e extremos)

1) A população inicial de uma colônia de bactérias é 10.000. Depois de t horas a colônia terá a população $P(t)$ que obedece à lei: $P(t) = 10.000(1{,}2^t)$.
   a) Qual o número de bactérias depois de 10 horas?
   b) Encontre a lei que dá a variação da população P em relação ao tempo t.
   c) Determine essa variação instantânea após 10 horas.

2) Um tanque está sendo esvaziado segundo a função $V(t) = 200(30 - t)^2$, onde o volume é dado em litros e o tempo em minutos. A que taxa a água escoará após 8 minutos? Qual a taxa média de escoamento durante os primeiros 8 minutos?

3) Numa granja, constatou-se que uma ave, no dia t, pesa, em gramas

$$w(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}.(t+4)^2, & para \quad 0 \le t \le 60 \\ 24{,}4t + 604, & para \quad 60 \le t \le 90, \end{cases}$$

   a) Qual a razão do aumento do peso da ave no 50º dia?
   b) Quanto a ave aumentará no 51º dia?
   c) Qual a razão de aumento de peso no 80º dia?

4) Numa pequena comunidade obteve-se uma estimativa que daqui a t anos a população será de $p(t) = 20 - \frac{5}{t+1}$.
   Daqui a 18 meses, qual será a taxa de variação da população desta comunidade?

5) Mariscos zebra são mariscos de água doce que se agarram a qualquer coisa que possam achar. Apareceram primeiro no Rio St. Lawrence no começo da década de 80. Estão subindo o rio e podem se espalhar pelos Grandes Lagos. Suponha que numa pequena baía o número de mariscos zebra ao tempo t seja dado por $Z(t) = 300t^2$, onde t é medido em meses desde que esses mariscos apareceram nesse lugar. Quantos mariscos zebra existirão na baía depois de quatro meses? A que taxa a população está crescendo em quatro meses?

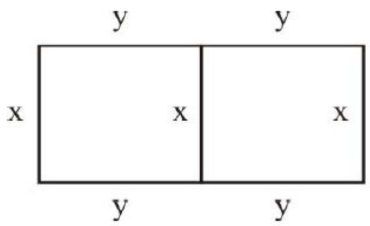
6) Um copo de limonada a uma temperatura de 40ºF está em uma sala com temperatura constante de 70ºF. Usando um princípio da Física, chamado ***Lei de Resfriamento de Newton***, pode-se mostrar que se a temperatura da limonada atingir 52ºF em uma hora, então a temperatura T da limonada como função no tempo decorrido é modelada aproximadamente pela equação $T = 70 - 30.e^{-0{,}5t}$, onde T está em ºF e t em horas. Qual a taxa de variação quando $t = 5$?

7) A Hungria é um dos poucos países do mundo em que a população está decrescendo. Se t é o tempo em anos desde 2010, a população, P, em milhões, da Hungria pode ser aproximada por $P = 10.\ (0{,}998)^t$.
   a) Qual população, para a Hungria no ano 2020, segundo este modelo?
   b) Qual a taxa de decrescimento da população atual? E para o ano 2020?

8) Um recipiente em forma de paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de 2.250 cm^3. O material para a base e a tampa do recipiente custa R$ 2,00 por cm^2 e o dos lados R$ 3,00 por cm^2. Quais as dimensões do recipiente de menor custo?

9) Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R$ 380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para ter o maior lucro possível?

10) Dois terrenos retangulares, com dimensões x e y e um lado comum x, como mostra a figura, devem ser murados. Cada terreno tem uma área de 400 m2. Determinar as dimensões de cada terreno para que o comprimento do muro seja o menor possível.



11) Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t é dada por $N = 5000(25 + te^{-t/20})$. Ache o maior número de bactérias durante o intervalo de tempo $0 < t < 100$.

12) Uma centena de animais pertencendo a uma espécie em perigo estão colocados numa reserva de proteção. Depois de t anos a população p desses animais na reserva é dada por

$$p = 100\frac{t^2 + 5t + 25}{t^2 + 25}$$

Após quanto tempo a população é máxima?

V. ANTIDERIVAÇÃO (introdução à integral)

Encontre as primitivas das seguintes funções

1) $f(t) = 4t^3 - 5$

2) $f(t) = 3\text{sen}(3t)$

3) $f(t) = 3(t^2 - 5t)^2(2t - 5)$

4) $f(t) = \frac{6t^5}{t^6 - 1}$