Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Joinville
Bacharelado Interdisciplinar em Mobilidade

# Funções Elementares do Cálculo

Prof. Dr. Milton Procópio de Borba

# Conteúdos da Aula

- ✓ Função exponencial;
- ✓ Função logarítmica;
- ✓ Funções trigonométricas;
- ✓ Funções trigonométricas inversas;
- ✓ Funções hiperbólicas;
- ✓ Funções hiperbólicas inversas.

# Função exponencial

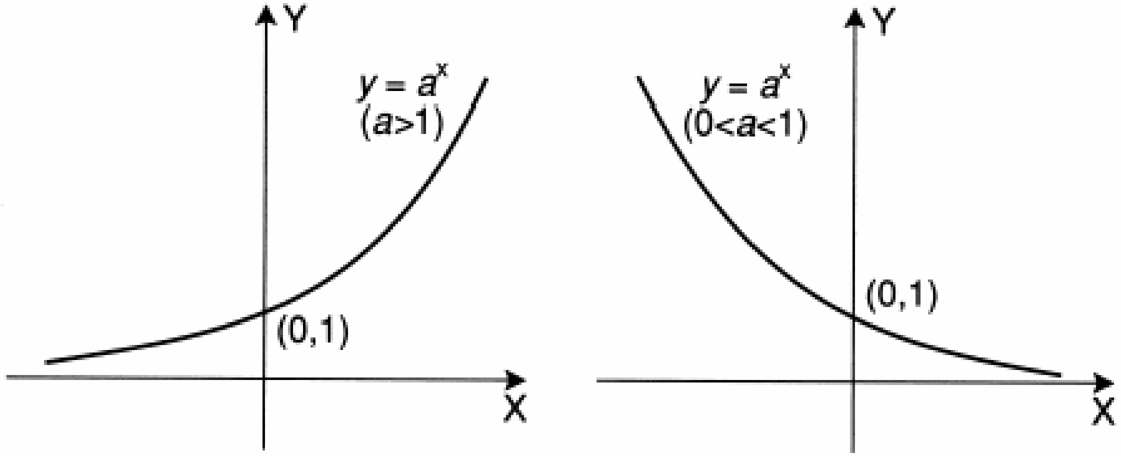
- ✓ Chamamos de função exponencial de base $a$ a função $f$ de $R$ em $R$ que associa a cada real $x$ o número real $a^x$, sendo $a$ um número real tal que $0 < a \neq 1$,

ou $$f : R \to R$$
$$x \to y = f(x) = a^x$$

- ✓ Domínio $\Rightarrow Dom(f) = R$

- ✓ Imagem $\Rightarrow Im(f) = (0, +\infty)$

# GRÁFICO:




# PROPRIEDADES:

Com relação a função $f(x) = a^x$, podemos afirmar:

***(i)*** A curva que a representa está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x > 0$, para todo $x \in R$.

***(ii)*** Corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

***(iii)*** $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

# Função logarítmica

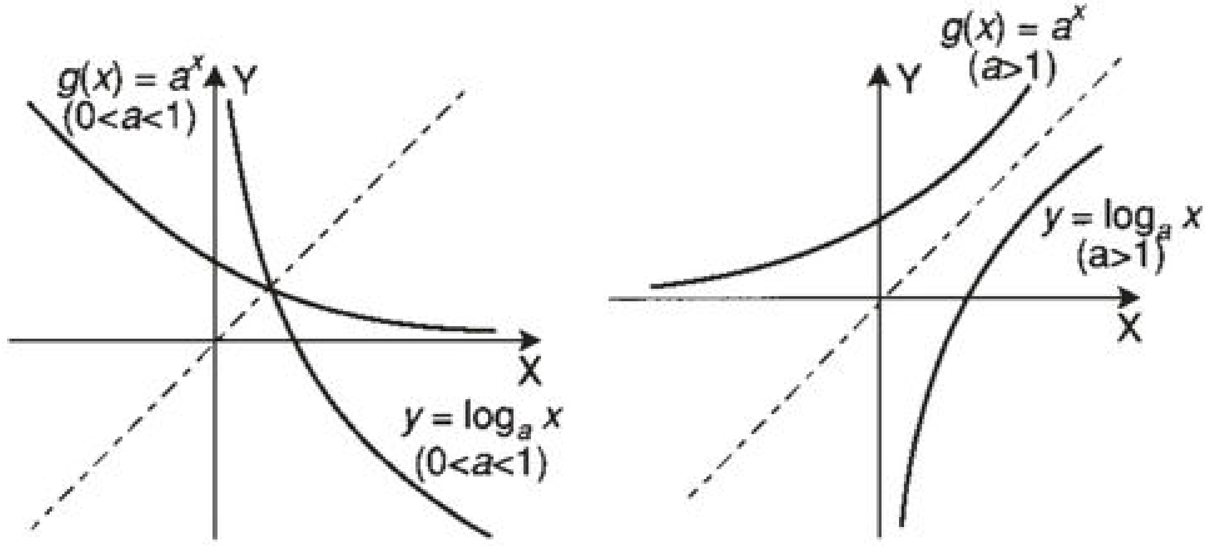
- ✓ Dado um número real $a$ , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos de função logarítmica de base $a$ a função de $(0, +\infty)$ em $R$ que se associa a cada $x$ o número $log_a\, x$, isto é,

$$f : (0, +\infty) \rightarrow R$$
$$x \rightarrow y = log_a\, x$$

- ✓ Domínio $\Rightarrow Dom(f) = (0, +\infty)$

- ✓ Imagem $\Rightarrow Im(f) = R$

# GRÁFICO:




## PROPRIEDADES:

Com relação ao gráfico da função $f(x) = log_a x \; (0 < a \neq 1)$, podemos afirmar:

***(i)*** Está todo do lado direito do eixo dos $y$.

***(ii)*** Corta o eixo das abscissas no ponto (1,0).

***(iii)*** $f(x) = log_a x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

***(iv)*** É simétrico ao gráfico da função $g(x) = a^x$ em relação a reta $y = x$ (funções inversas)

# Logaritmos Naturais

Uma escolha conveniente para a base do logaritmo é a base $e$.

O logaritmo na base $e = 2{,}71828182845904523536028 74\ldots$

(número de Neper) é chamado logaritmo natural e tem a

seguinte notação:

$$log_e x = \ln x$$

definido por: $log_e x = \ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$

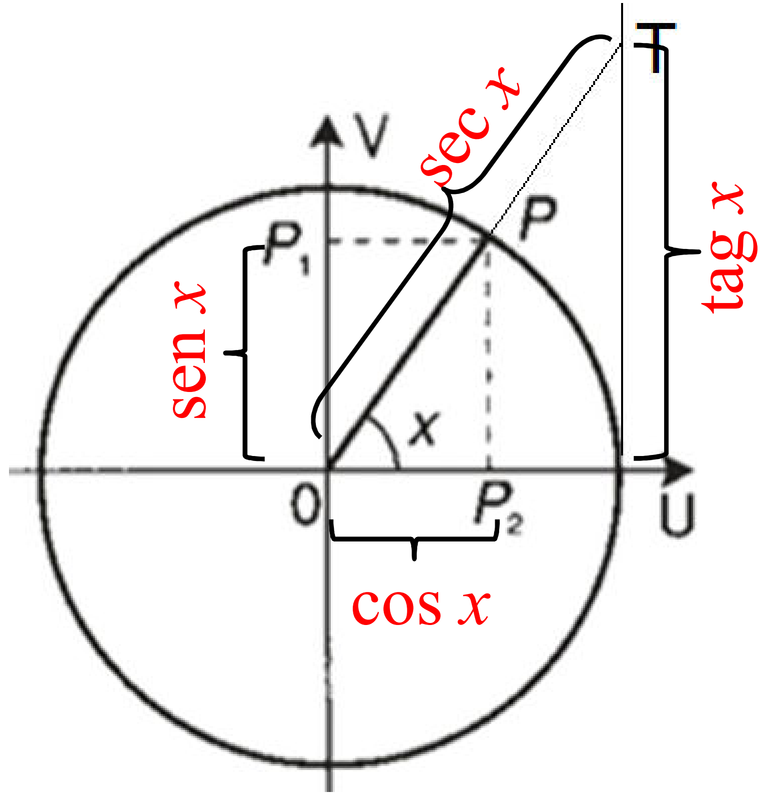
**Exemplo:** Encontre x se $\ln x = 5$.

Usando a definição temos

$$\ln x = 5 \Rightarrow e^5 = x$$

# Funções trigonométricas

- ✓ Função seno
- ✓ Função cosseno
- ✓ Função tangente
- ✓ Função cotangente
- ✓ Função secante
- ✓ Função cossecante



# Função seno

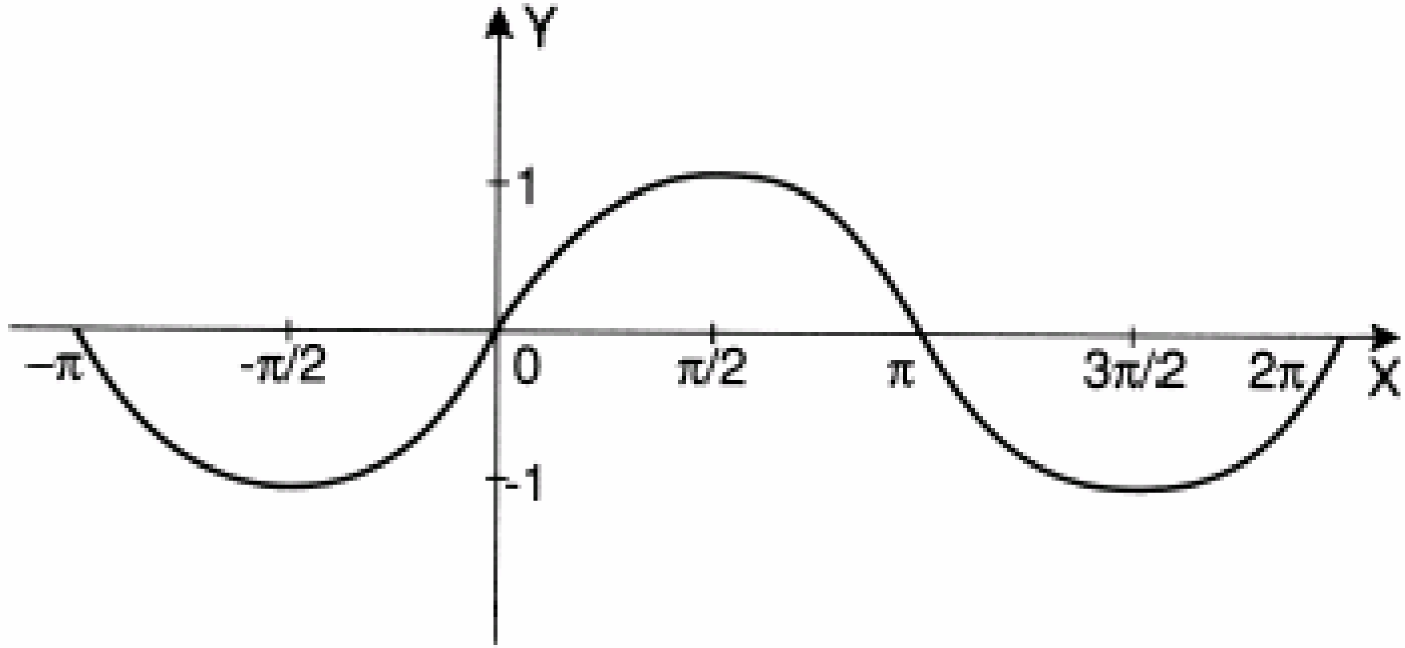
- Função seno é a função $f$ de $R$ em $R$ que a cada $x \in R$ faz corresponder o número real $y = sen\,x$, isto é,

$$f : R \to R$$
$$x \to y = sen\,x$$

- Domínio $\Rightarrow Dom(f) = R$

- Imagem $\Rightarrow Im(f) = [-1, 1]$

# Função seno – Gráfico:




“A função seno é periódica e seu período é 2π”

# Função cosseno

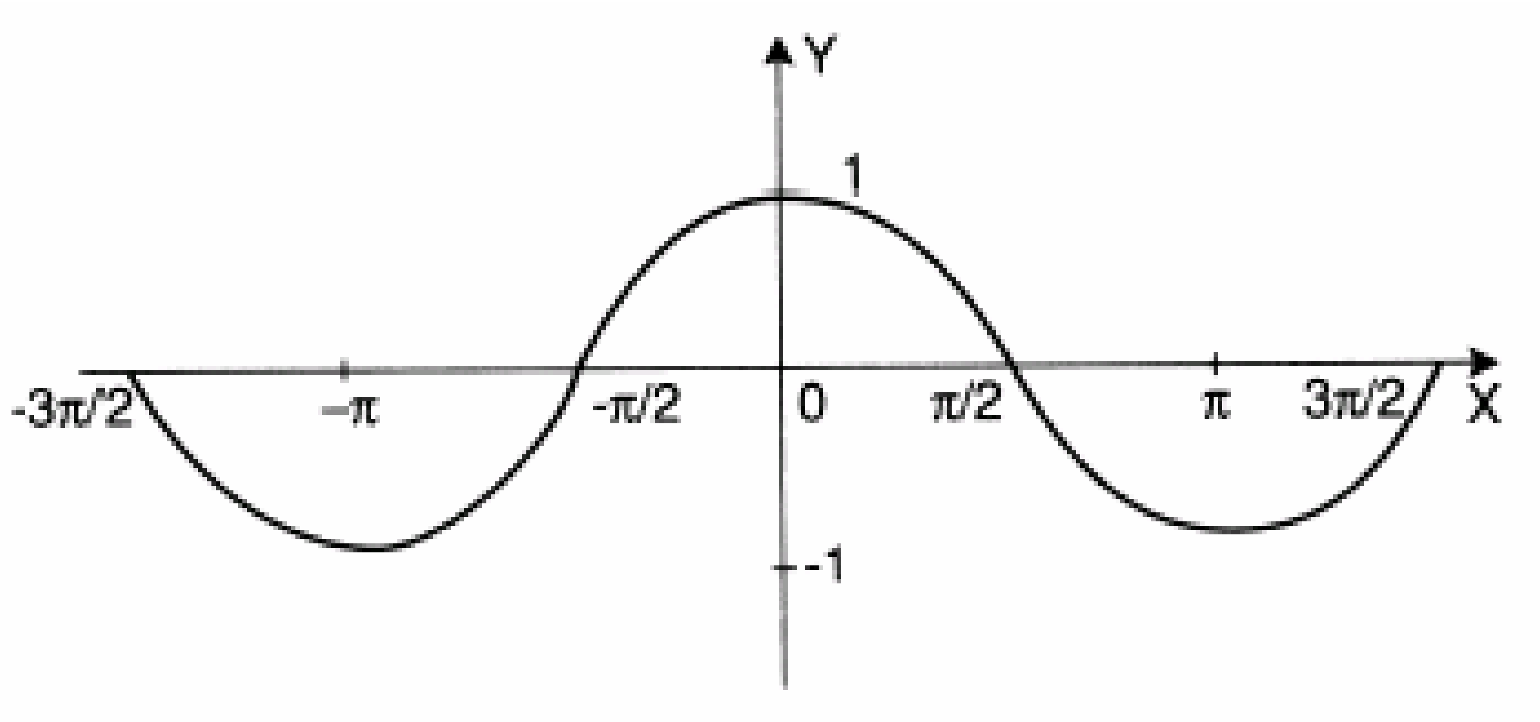
- ✓ Função cosseno é a função $f$ de $R$ em $R$ que a cada $x \in R$ faz corresponder o número real $y = \cos x$, isto é,

$$f : R \to R$$
$$x \to y = \cos x$$

- ✓ Domínio $\Rightarrow Dom(f) = R$

- ✓ Imagem $\Rightarrow Im(f) = [-1, 1]$

# Função cosseno – Gráfico:




“A função cosseno é periódica e seu período é $2\pi$”

# Função tangente, cotangente, secante e cossecante

$\Rightarrow$ tangente:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$\Rightarrow$ cotangente:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$\Rightarrow$ secante:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$\Rightarrow$ cossecante :

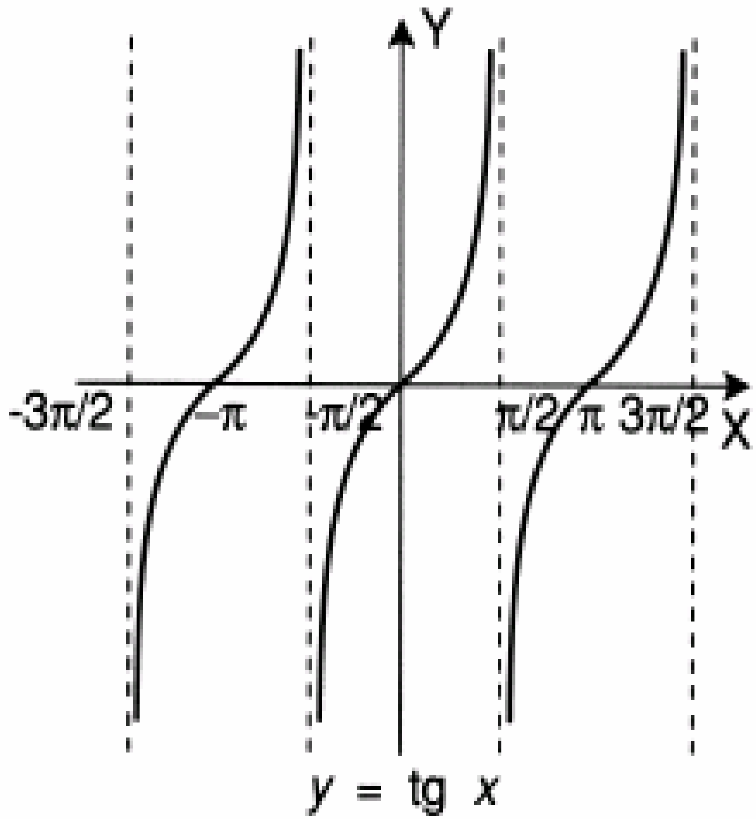
$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

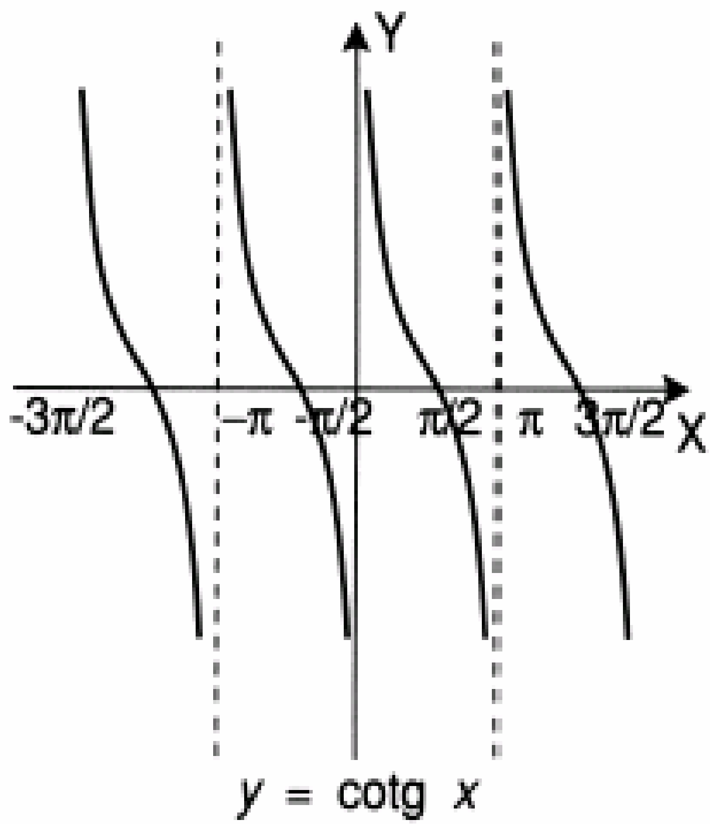
* condição:

$$\cos x \neq 0$$

* condição:

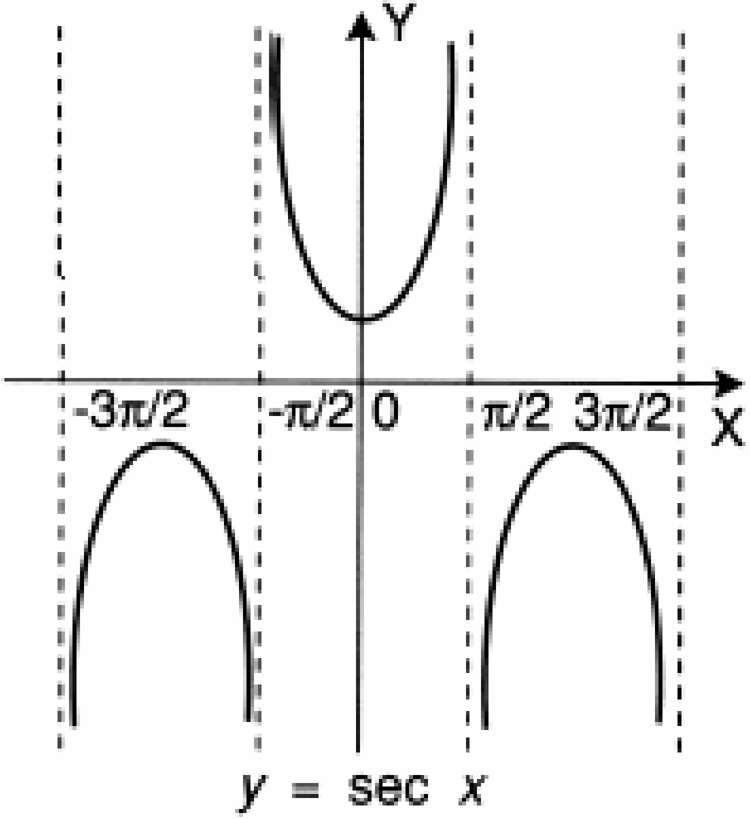
$$\text{sen } x \neq 0$$

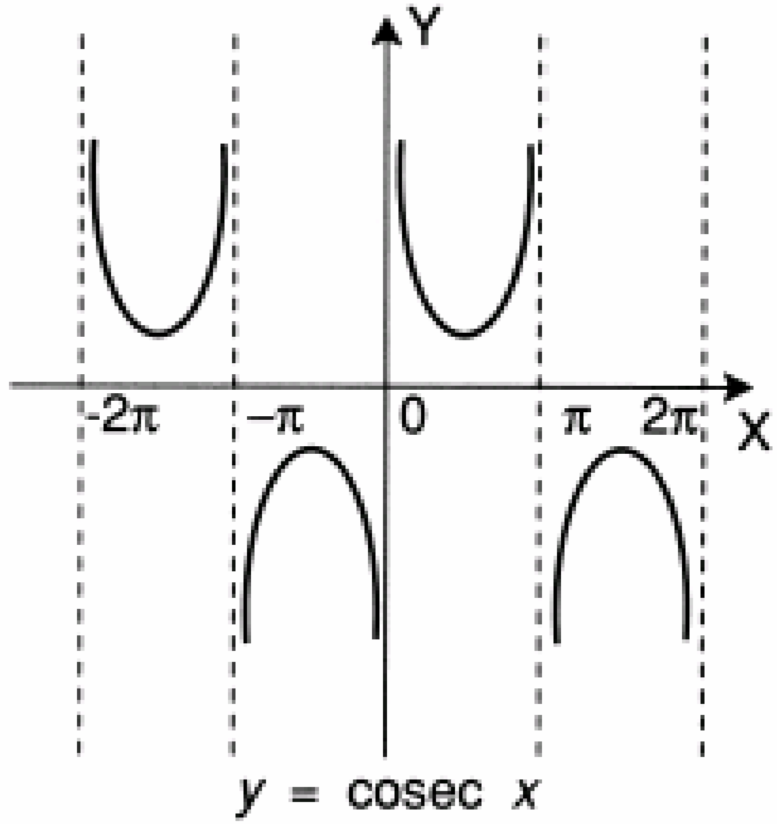



$$Dom(\mathrm{tg}) = \{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z\}$$

$$Dom(\mathrm{cotg}) = \{x \in R \,/\, x \neq n\pi, n \in Z\}$$




$$Dom(\sec) = \{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathrm{Z}\}$$

$$Dom(\mathrm{cosec}) = \{x \in R \,/\, x \neq n\pi, n \in \mathrm{Z}\}$$

# Funções trigonométricas inversas

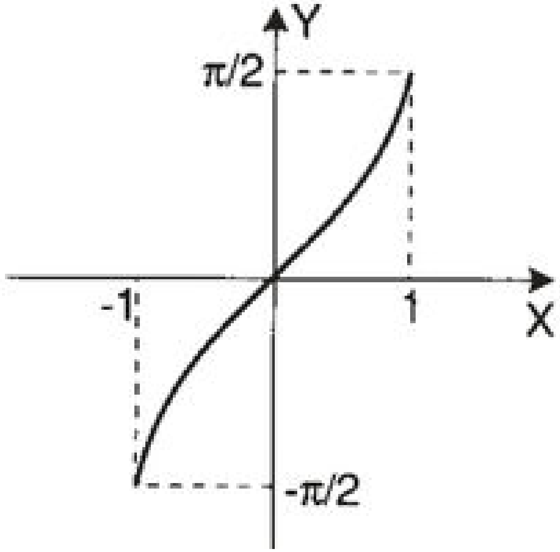
$y = \text{arc sen } x \iff \text{sen } y = x$

$$f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1],$$

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$f^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2],$$

$$f^{-1}(x) = arc\,\text{sen } x$$



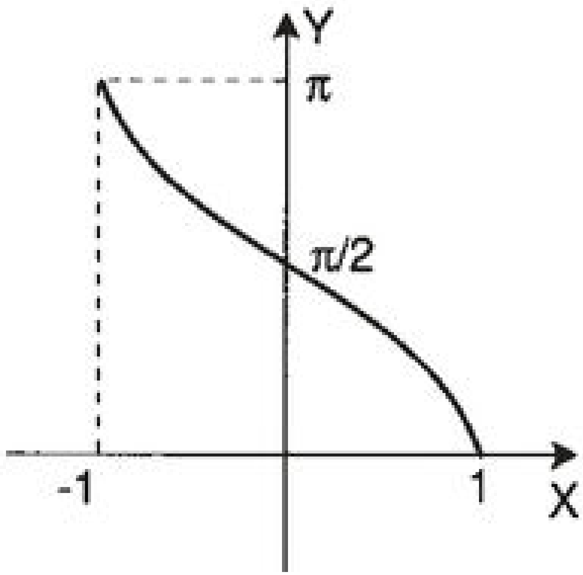

$y = arc\ \cos x \iff x = \cos y$

$$f: [0, \pi] \to [-1,1],$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi],$$

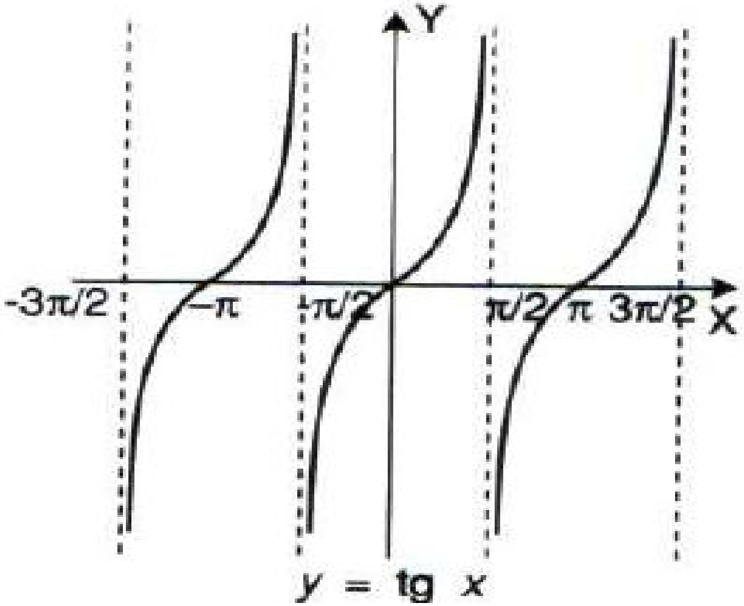
$$f^{-1}(x) = arc\ \cos x$$



A função $y = arc\cos x$ pode também ser definida pela equação:

$$\boldsymbol{y = arc\cos x = \frac{\pi}{2} - arc\ sen\ x.}$$

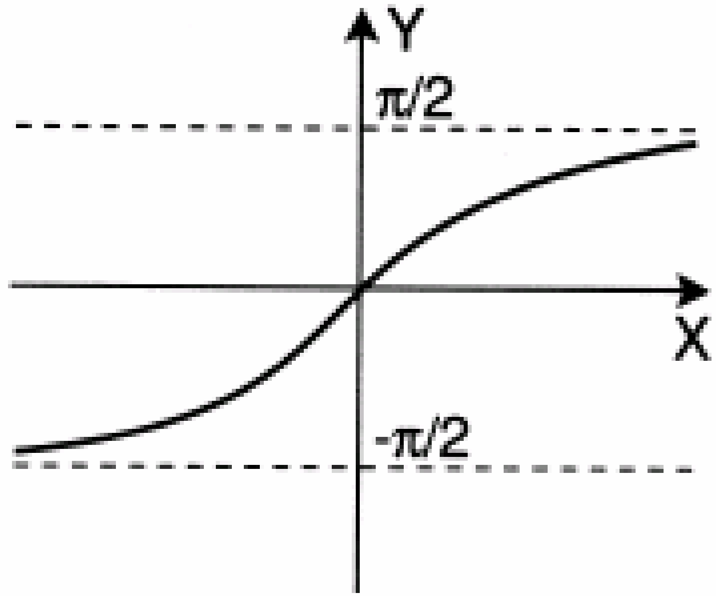
# Funções trigonométricas inversas




$f: (-\pi/2, \pi/2) \to R,$

$f(x) = tg\, x$

$y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow x = \text{tg } y$

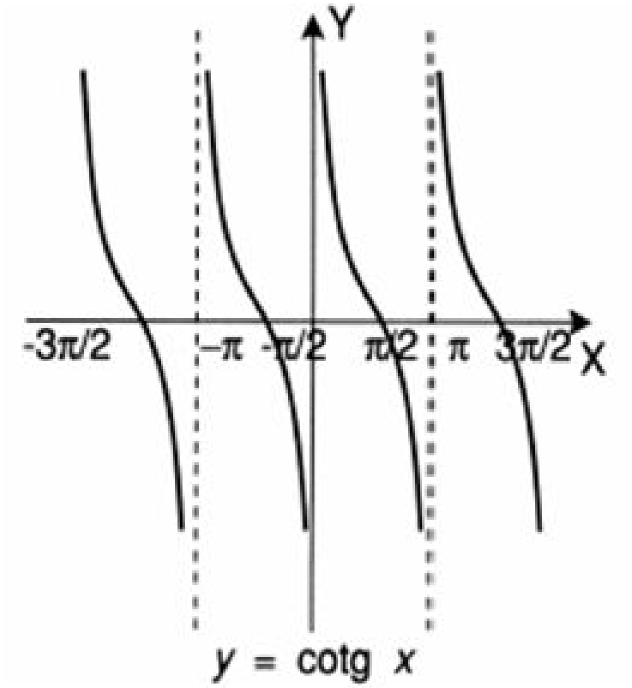


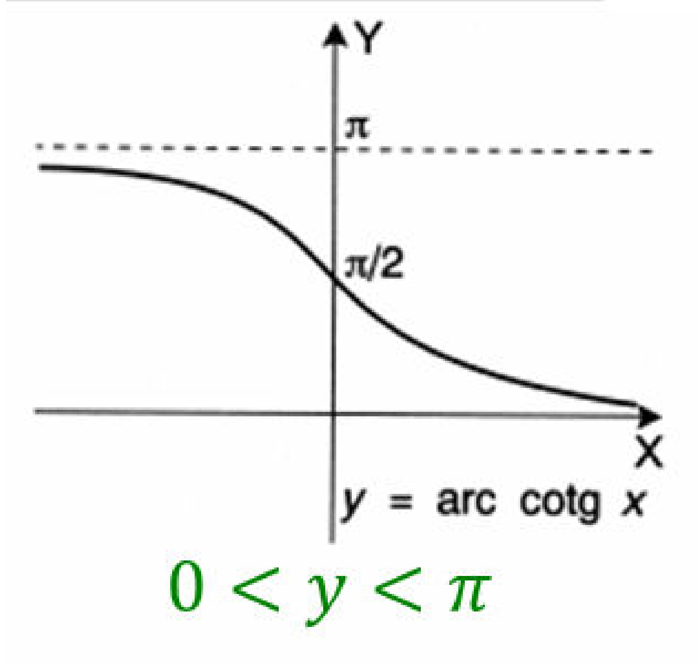

$f^{-1}: R \to (-\pi/2, \pi/2)$

$f^{-1}(x) = arc\, tg\, x$

# Funções trigonométricas inversas

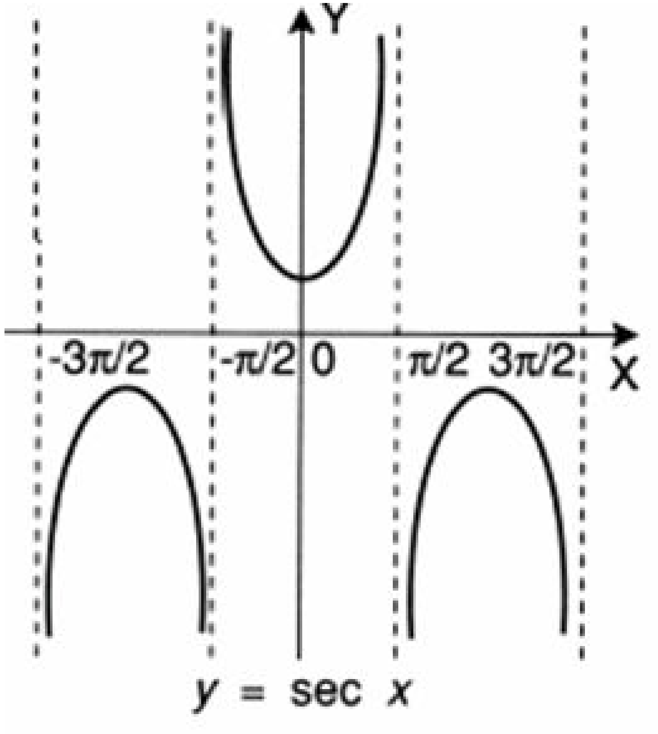
$$y = \text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x$$

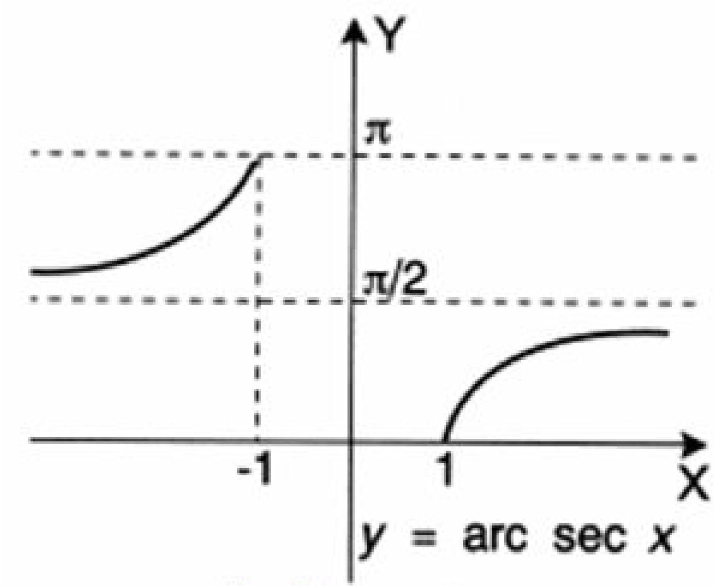


# Funções trigonométricas inversas

$$y = arc\sec x \; = arc\cos(1/x)$$

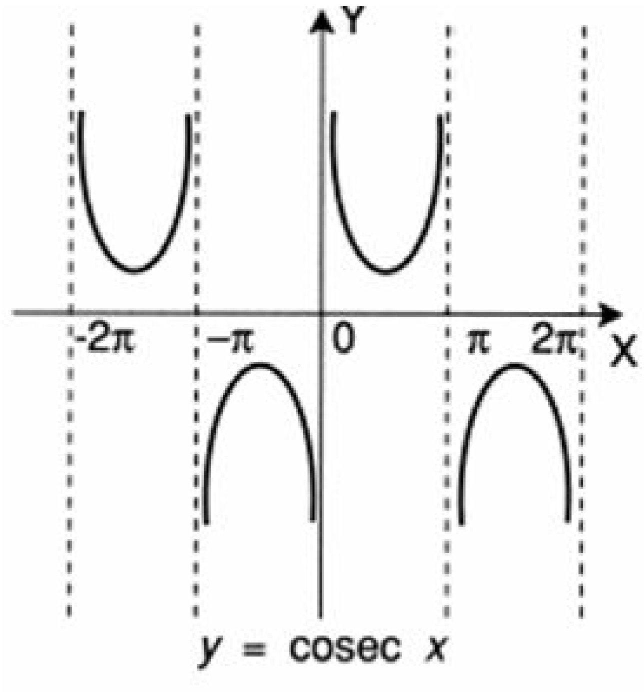


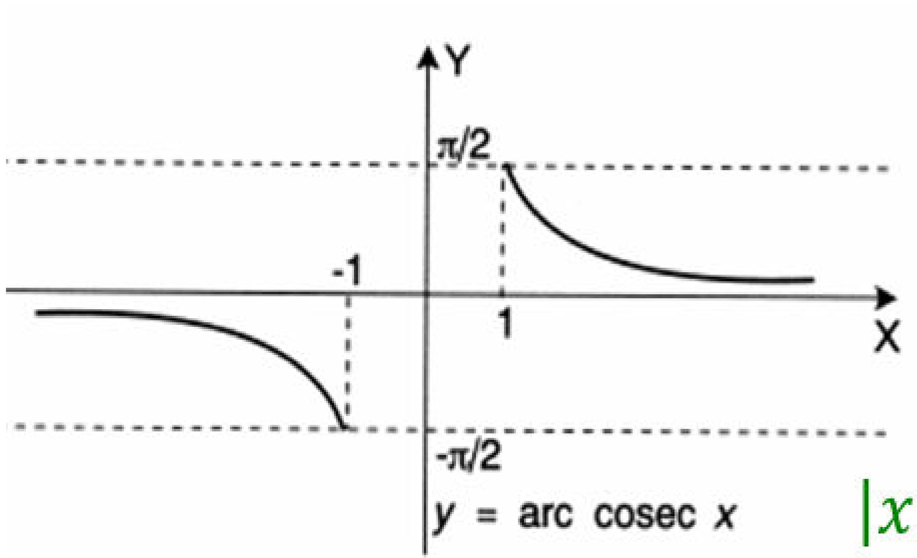




$|x| \geq 1$

# Funções trigonométricas inversas

$$y = arc\ \mathrm{cosec}\ x\ = arc\ sen(1/x)$$




$|x| \geq 1$

# Funções hiperbólicas

- Seno hiperbólico:

$$\text{senh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

- Cosseno hiperbólico:

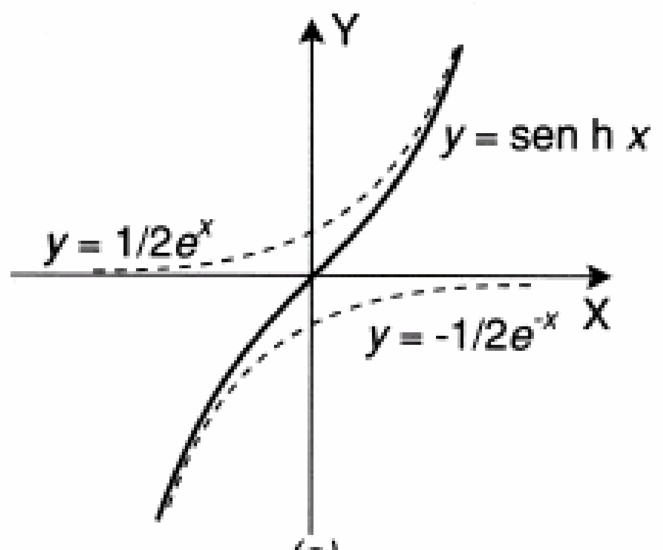
$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$Dom(\text{senh}) = (-\infty, +\infty)$$

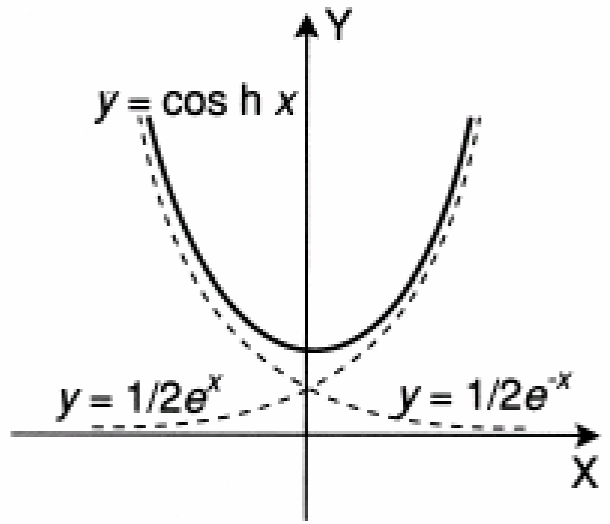
$$Dom(\cosh) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Im}(\text{senh}) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Im}(\cosh) = [1, +\infty)$$



(a)

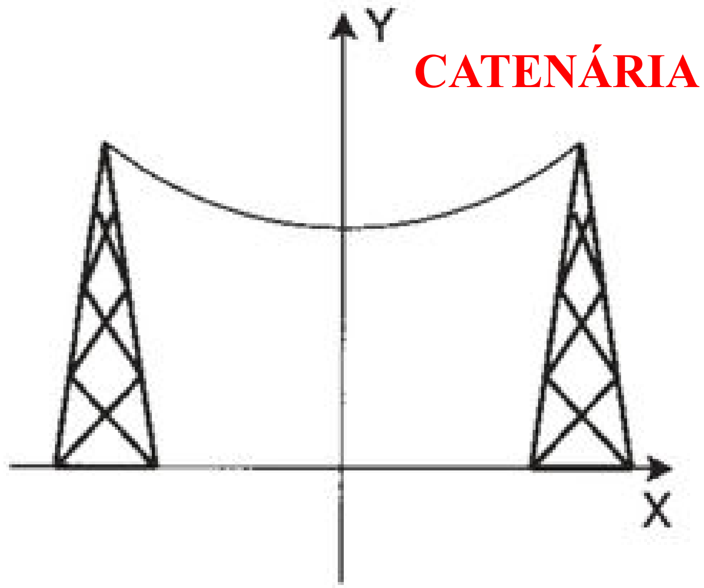


(b)

# Funções hiperbólicas
# Aplicação

A curva formada por um fio de telefone ou de luz é representada pelo cosseno hiperbólico:

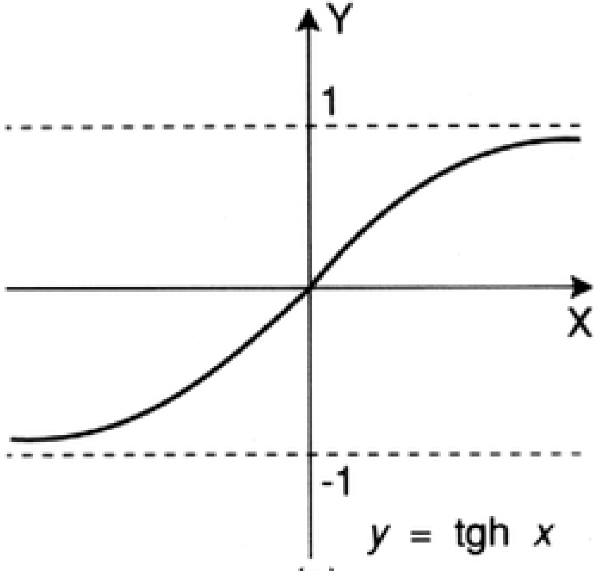
$$y = \cosh(x/a), a \in R$$



# Funções hiperbólicas

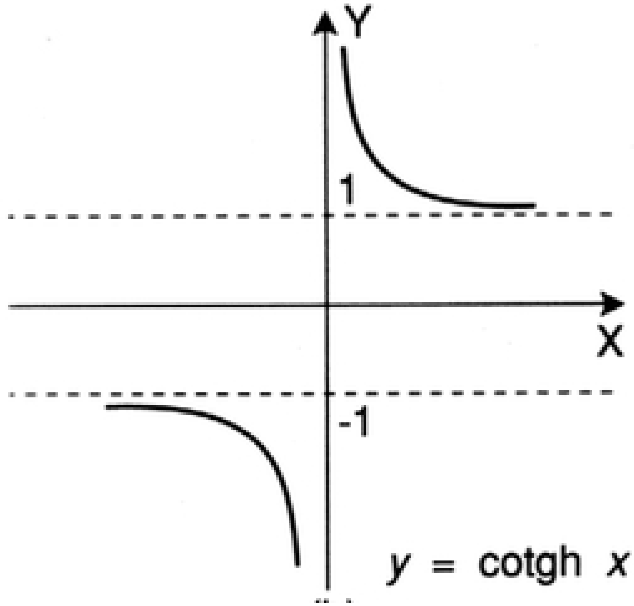
$\Rightarrow$ tangente hiperbólico :

$$\text{tgh}\ x = \frac{\text{senh}\ x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$




$\Rightarrow$ cotangente hiperbólico :

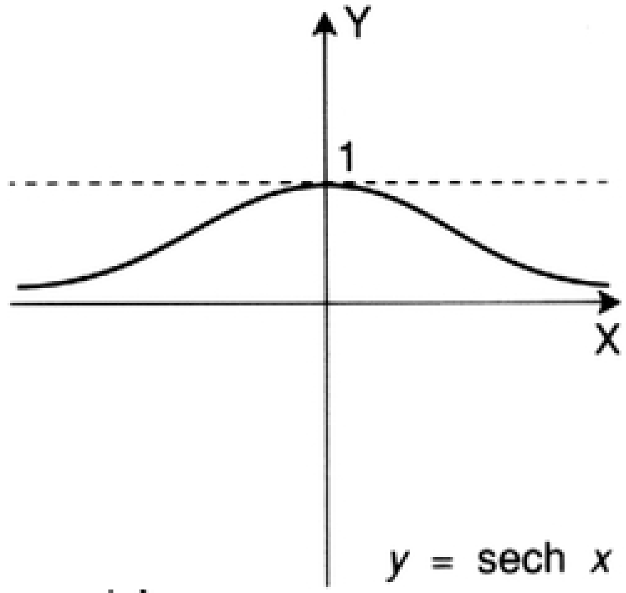
$$\text{cotgh}\ x = \frac{\cosh x}{\text{senh}\ x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$



# Funções hiperbólicas

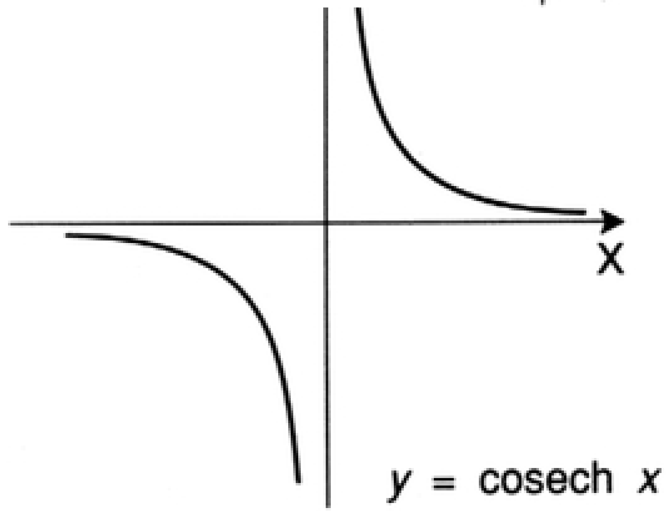
$\Rightarrow$ secante hiperbólico :

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$




$\Rightarrow$ cossecante hiperbólico :

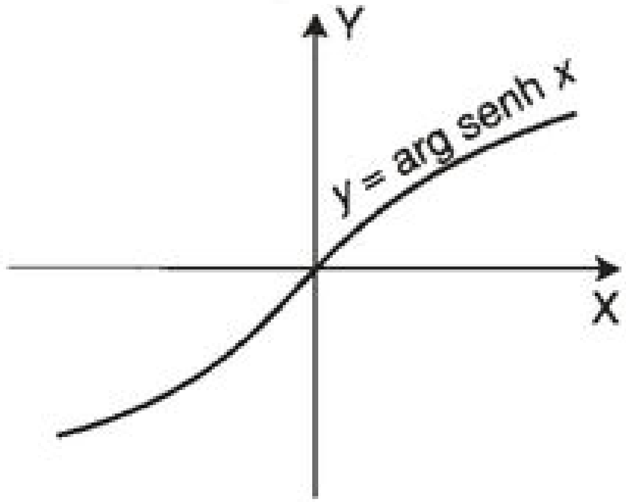
$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

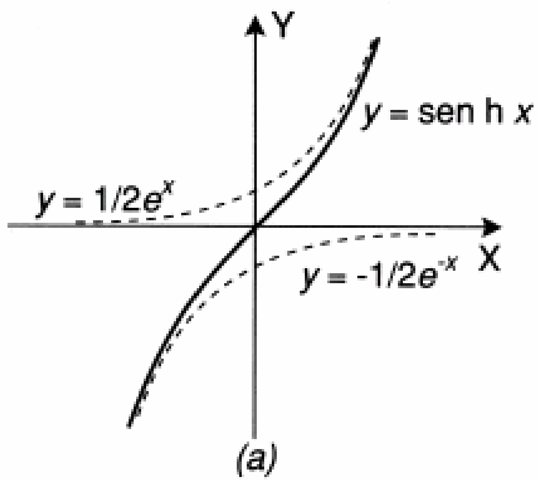


# Funções hiperbólicas Inversas

**Função Inversa do Seno Hiperbólico**: a função inversa do seno hiperbólico, chamada **argumento do seno hiperbólico** e denotada por **arg senh**, é definida como segue:

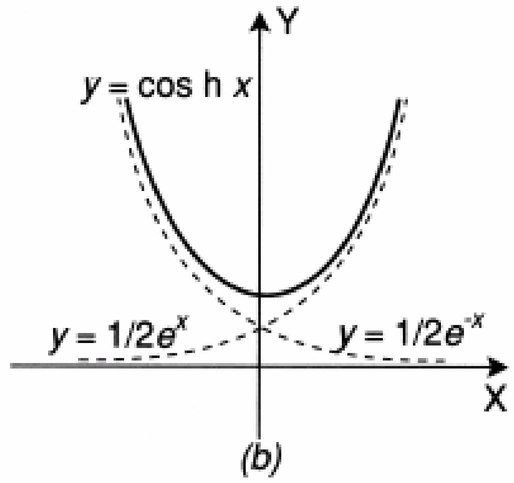
$$y = \text{arg senh}\, x \Leftrightarrow x = \text{senh}\, y$$



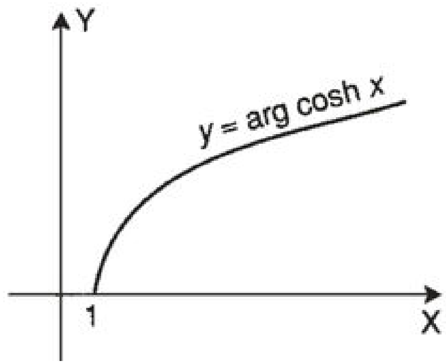

Temos Dom (arg senh $x$) = Im (arg senh $x$) = $R$

**Função Inversa do Cosseno Hiperbólico**: para definirmos a função inversa do cosseno hiperbólico, precisamos restringir seu domínio.




$f: [0, +\infty) \to [1, +\infty);\ f(x) = \cosh x$

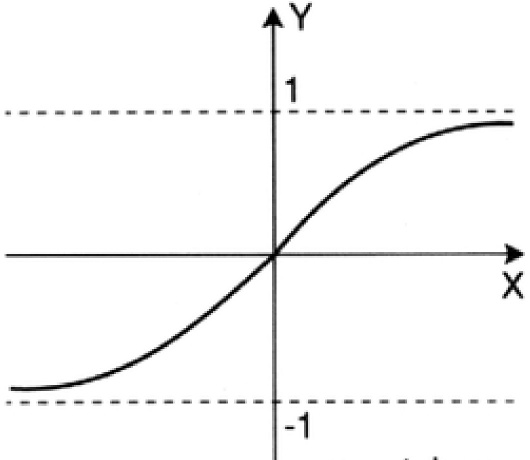
$$y = \arg\cosh x \iff x = \cosh y$$



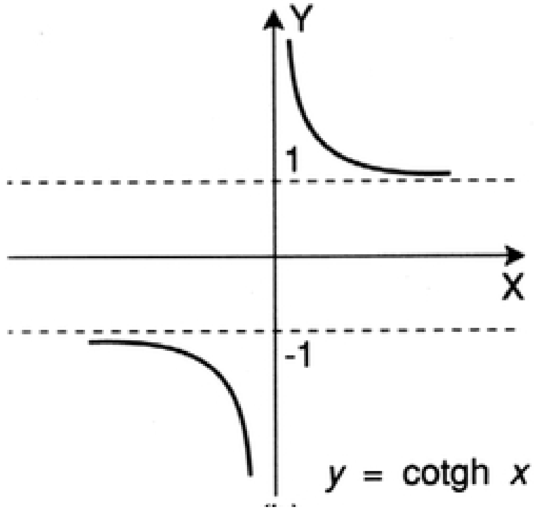

Temos Dom $(\arg\cosh x) = [1, +\infty)$
e Im $(\arg\cosh x) = [0, +\infty)$

**Função Inversa da Tangente, Cotangente e Cossecante Hiperbólica**: para a definição das inversas destas funções não necessitamos restringir seus domínios.

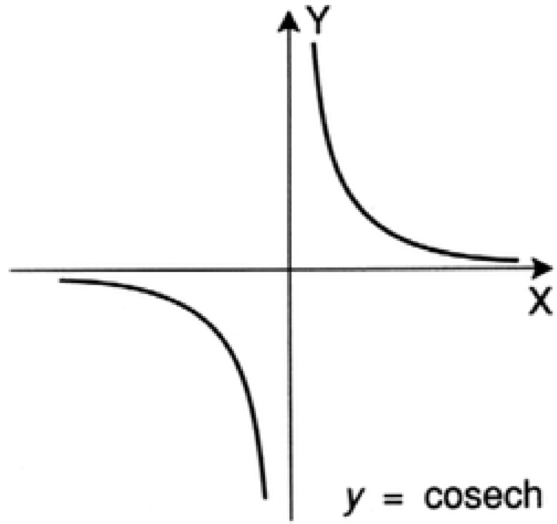
$$y = \text{arc tgh } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{tgh } y$$
$$y = \text{arg cotgh } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cotgh } y$$
$$y = \text{arg cosech } x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{cosech } y$$



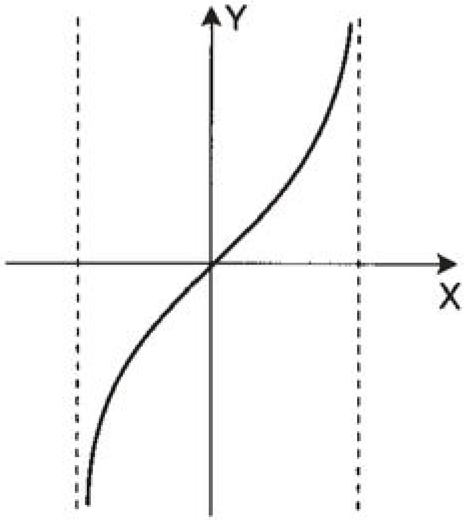
$y$ = tgh $x$



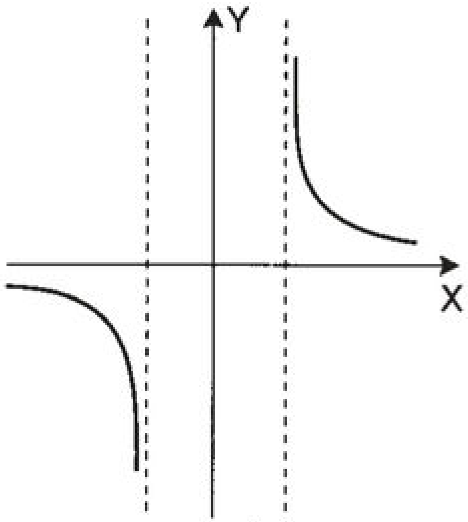
$y$ = cotgh $x$



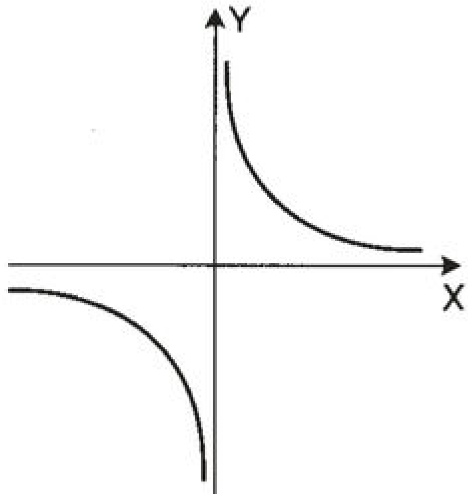
$y$ = cosech $x$



$y$ = arg tgh $x$



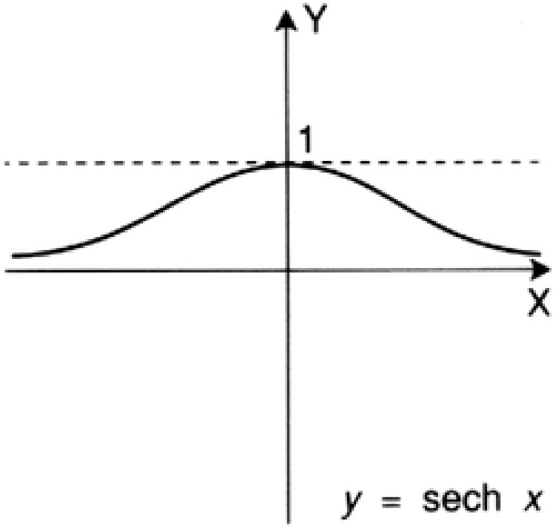
$y$ = arg cotgh $x$



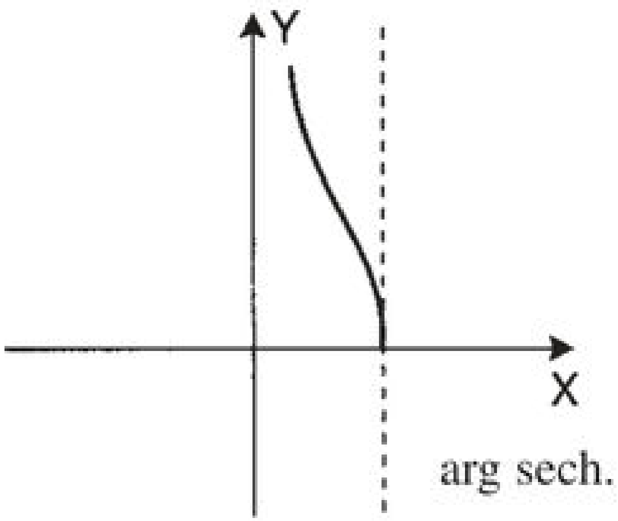
$y$ = arg cosech $x$

**Função Inversa do Secante Hiperbólica**: para definirmos a função inversa da secante hiperbólica, precisamos restringir seu domínio.

$f: [0, +\infty) \to (0,1];\ f(x) = \operatorname{sech} x$




$$y = \arg \operatorname{sech} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$$




$$Dom(arg\, sech) = (0, 1]$$
$$Im(\arg sech) = [0, +\infty)$$