

Exercícios de CDI-II – Funções de Várias Variáveis - Prof. Milton

- 1) Calcule, se existir, o limite de $F(x,y) = (x-2)^2/(x^2 + y^2 - 4x + 4)$, quando $(x,y) \rightarrow (2,0)$. **Resp.: $\frac{1}{4}$**
- 2) Calcule, se existir, o limite de $G(t,v) = t^2v^2/(t^2 + v^2)$, quando $(t,v) \rightarrow (0,0)$. **Resp.: 0**
- 3) Calcule, se existir, o limite de $V(x,y) = (x^m + y^n)/(x^2 + y^2)$, quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, se $\{m, n\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$.
Resp.: Só existe o limite para $m = n = 2$ ($\lim = 1$) e para $m = n = 3$ ($\lim = 0$).
- 4) Verifique a continuidade de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2(y+1) + 3y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 3 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ **Resp.: *É contínua***
- 5) Verifique a continuidade de $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y + 2}{x^2 + y^2 + 4y + 4} & \text{se } (x,y) \neq (0,-2), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,-2), \end{cases}$ **Resp.: *Não é contínua***
- 6) Dada $T(t,x) = 8e^{-(\pi^3)^2 t} \text{sen}(\pi x/3)$, calcule $\partial T/\partial t$ e $\partial^2 T/\partial x^2$. **Resp.: $-\pi^2 T/9 = -8\pi^2 e^{-(\pi^3)^2 t} \text{sen}(\pi x/3)/9$,**
- 7) Dada $f(x,y) = x^2t + xy^2$, calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial^2 f/\partial y^2$. **Resp.: $2xt + y^2$ e $2x$**
- 8) Dada $y = 3t^2x + 2\text{sen } tx$, calcule $\partial^2 y/\partial x^2$ e $\partial^2 y/\partial t^2$. **Resp.: $-2t^2 \text{sen } tx$ e $6x - 2x^2 \text{sen } tx$**
- 9) Dada $F(t,x,y,z) = 3t^2x^2yz^3 + 2t^2 \text{sen } x^2yz^3$, calcule as primeiras derivadas e $\partial^2 F/\partial t \partial y$ e $\partial^2 F/\partial y \partial t$.
Resp.: $tx^2z^3(6 + 4\cos x^2yz^3)$
- 10) Dada $z = 2F^2 + 3G$, com $F = x^2y + y$ e $G = x + y^2$, calcule $\partial z/\partial x$ em $(x,y) = (1/2, 1)$. **Resp.: 8**
- 11) Dado que $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y = 9$, calcule $\partial y/\partial x$. **Resp.: $-(2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1)/(2x^3y + 3x^2y^2 + x + 1)$**
- 12) a) Dado que $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, calcule $\partial z/\partial y$. **Resp.: $-y/z$**
b) Dado que $x^2y^2 + z^2 = 25$, calcule $\partial z/\partial y$. **Resp.: $-x^2y/z$**
- 13) Se $z^2 + 2/x = \sqrt{y^2 - z^2}$, mostre que $x^2z_x + (1/y)z_y = 1/z$
- 14) Calcule z_x e z_y em $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. **Resp.: $-c^2x/a^2z$ e $-c^2y/b^2z$**
- 15) Um gás perfeito ($k = 8 \text{ atm.cm}^3/\text{K}$) registra um volume de 100cm^3 na temperatura de 90°C .
Calcule a taxa de variação da pressão por $^\circ\text{C}$ num processo isométrico. **Resp.: $0,08\text{atm}/^\circ\text{C}$**
Calcule a taxa de variação do volume por atm num processo isotérmico. **Resp.: $-(1250/363)\text{cm}^3/\text{atm}$**
- 16) Um cone, num certo instante tem raio de $0,5\text{m}$ e altura de 1m .
Seu raio aumenta com velocidade de $0,1\text{m/s}$ e sua altura com velocidade de $0,05\text{m/s}$.
Calcule a velocidade com que seu volume aumenta e expresse o volume como função do tempo.
Resp.: $V' = 3\pi/80 \text{ m}^3/\text{s}$ e $V = \pi/12 + 3\pi/80$
- 17) Uma lata fechada, metálica, na forma de um cilindro circular reto, tem internamente, 9cm de altura e 2cm de raio. Use diferencial para ter uma estimativa do volume de material usado com $0,1\text{cm}$ de espessura. Calcule, ainda, para comparar, o volume correto de material.
Resp.: $22\pi/5 \text{ cm}^3 \approx 13,82 \text{ cm}^3$ e $1143\pi/250 \text{ cm}^3 \approx 14,36 \text{ cm}^3$
- 18) Uma caixa retangular, tem internamente, as medidas 12cm , 8cm e 6cm (de altura). Com espessura das paredes laterais de $0,2\text{cm}$ e do fundo de $0,3\text{cm}$, use diferencial para ter uma estimativa do volume de material usado. Calcule, ainda, para comparar, o volume correto de material.
Resp.: $76,8 \text{ cm}^3$ e $80,208 \text{ cm}^3$

- 19) Encontre os pontos críticos das funções:

$$U(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110 \quad \text{Resp.: } (1, -2)$$

$$V(t,y) = t^2 + y^2 - 2t + y + 2 \quad \text{Resp.: } (1, -1/2)$$

$$W(t,x) = t^3 + x^3 - 18tx \quad \text{Resp.: } (0, 0) \text{ e } (6, 6)$$

$$W_1(t,x) = t^2 + x^3 - 18tx \quad \text{Resp.: } (0, 0) \text{ e } (486, 54)$$

$$f(r,s) = 4rs^2 - 2r^2s - r \quad \text{Resp.: } (0, 1/2) \text{ e } (0, -1/2)$$

- 20) Determine as dimensões de uma caixa retangular, sem tampa, para que nela caibam 108cm^3 , com o menor consumo de material para suas paredes. **Resp.: base quadrada de 36cm^2 e altura de 3cm**

- 21) Determine as dimensões de uma caixa retangular, sem tampa, com máximo volume e mesma quantidade de material (S). **Resp.: base quadrada de lado $(1/3)\sqrt{3S}\text{ cm}$ e altura de $(1/6)\sqrt{3S}\text{ cm}$**

- 22) Alguns correios exigem que o perímetro da base somada com a altura não passe de 84cm .

Qual o maior volume que pode ser enviado ? **Resp.: 5488cm^3**

- 23) Determine o(s) ponto(s) críticos da função dada por $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 5$

Resp.: $(-3/2, -3/2)$

- 24) Se $V = \pi R^2 h$, mostre uma aplicação da fórmula $dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial h} dh$. **Resp.: Exercício 17)**

$$\frac{\partial V}{\partial R} \quad \frac{\partial V}{\partial h}$$

- 25) Quais as dimensões mais econômicas de uma caixa (sem tampa) de 5 litros com o fundo e uma das faces laterais custando o dobro das outras três faces?

Resp.: face cara quadrada de lado $\sqrt[3]{\frac{10}{3}}\text{ cm} \approx 1,49\text{ cm}$ e comprimento de $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{10}{3}}\text{ cm} \approx 2,24\text{ cm}$

- 26) Uma "lata" tem o fundo com o formato ao lado e altura h .

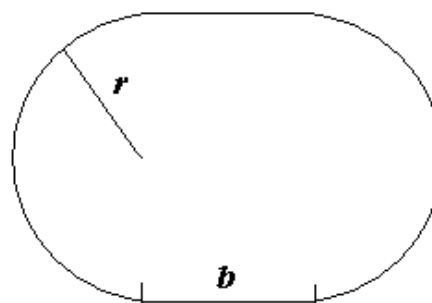
Determine a taxa de variação do seu volume V

- quando só r varia. **Resp.: $2(\pi r + b)h\text{ cm}^3/\text{cm}$**

- quando só b varia. **Resp.: $2rh\text{ cm}^3/\text{cm}$**

- quando só h varia. **Resp.: $(\pi r^2 + 2rb)\text{ cm}^3/\text{cm}$**

Qual a variação total de V quando r e b aumentam 10% enquanto que h diminui 5% ? **Resp.: 15%**



Se o material do fundo custa o triplo do material das superfícies laterais, calcule a variação do custo quando aumentamos a altura e o raio em 6% e diminuimos b em 8% .

Resp.: $(9\pi r^2 - 3rb + 6\pi rh - bh)/25\text{ cm}^3$

Analise esta resposta se $r = 10\text{cm}$, $b = 15\text{cm}$ e $h = 20\text{cm}$. **Resp.: $(80\pi - 30)\text{ cm}^3 \approx 233,89\text{ cm}^3 \approx 6,32\%$**