

Cenário sobre funções

Além da representação analítica e da linguagem natural uma das principais representações que usamos no ensino de matemática é a representação gráfica. A conversão de uma representação para outra é importante para a aprendizagem e, em geral, é difícil para os alunos.

Quando estudamos funções, a passagem da representação analítica para a gráfica e vice-versa é muito importante para o entendimento de vários conceitos com domínio, imagem, gráfico, período, funções pares e ímpares, transformações no gráfico (deslocamentos verticais e horizontais, expansões, contrações), função inversa e etc.

E como uma das grandes vantagens da utilização do computador no ensino da matemática é a representação gráfica, desenvolvemos o cenário de **funções**, com o objetivo de fazer com que o aluno ande naturalmente entre a representação gráfica e a analítica.

É recomendado que na primeira utilizemos o laboratório para a demonstração dos comandos básicos do WinPlot para se trabalhar posteriormente com funções.

O cenário sobre funções está dividido em duas seções.

- Seção 1 - Representação gráfica das funções, domínio, imagem, função crescente e decrescente, função par, ímpar nem par nem ímpar, raízes, intersecções.
- Seção 2 - Aspectos básicos do estudo de funções, funções e inequações do primeiro grau, transformações no gráfico.

Seção 1 - Funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponencial, logarítmica.

Tema: Funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponencial, logarítmica.

Pré-requisitos: conhecimento das funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponencial, logarítmica, sistema cartesiano.

Público alvo: Alunos da primeira série do ensino médio e das disciplinas de cálculo da 1ª fase dos cursos de ciências exatas.

Objetivos:

- Aplicar os comandos do **WinPlot** no estudo de funções
- Identificar domínio e imagem de funções
- Reconhecer quando a função é crescente ou decrescente.
- Reconhecer quando a função é par ou ímpar.
- identificar as raízes no gráfico
- Identificar pontos de intersecção.

Tempo estimado: 45 minutos

Software: WinPlot

O software winplot, encontrado no site <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>, foi produzido por Richard Parris da Phillips Exeter Academy e a versão em português foi preparada com a assistência de Adelmo Ribeiro de Jesus, professor Adjunto da UFBA (aposentado), professor do curso de matemática da universidade católica de Salvador e da faculdade Jorge Amado.

Este software é simples, de acesso fácil, gratuito, podendo ser utilizado por professores e alunos do ensino fundamental, médio, e superior. Cabe num disquete, pois seu tamanho é de apenas 1.271 Kb. Para utilizá-lo é necessário que o usuário já tenha um determinado conhecimento das funções que irá trabalhar e familiarizar-se com os comandos do programa. Neste capítulo apresentaremos apenas os comandos que utilizaremos nos cenários de funções.

Conhecendo o programa

Quando abrimos o programa, aparece uma tela com apenas dois menus: janela e ajuda. conforme figura 1.



Figura 1

Sendo que dentro do menu janela temos as opções de representação de gráfico em duas ou três dimensões, adivinhar, mapeador, abrir última, usar padrão e sair como mostra a figura 2.



Figura 2

Na opção **2-dim F2**, abre uma nova janela para gráficos em duas dimensões. Em **3-dim F3**, abre uma nova janela para gráficos em três dimensões. Ao clicarmos no menu **adivinhar** abre-se uma janela com um gráfico onde o usuário tem que adivinhar a que função pertence aquele gráfico. **Abrir última**, quando ativamos esta opção e a deixamos marcada, assim que o Winplot for aberto novamente ele automaticamente abrirá o último arquivo utilizado. **Usar padrão**, usa as configurações padronizadas do Winplot.

Dentro do menu **ajuda** temos duas opções: **ajuda** e **sobre**. Na opção **ajuda** aparece uma tela com uma pequena explicação sobre as noções iniciais a respeito do programa. No menu **sobre** aparece uma outra janela contendo algumas informações sobre o programa.

Para o cenário que desenvolveremos para o ensino médio, exploraremos mais as opções do menu **2-dim F2**.

Menu 2-dim F2

Nesta janela é que escrevemos a função a ser plotada, se queremos marcar pontos, definir segmentos, funções explícitas, implícitas, polares, paramétrica e etc. Enfim todo trabalho, em duas dimensões, com funções pode ser feito nesta janela, mostrada na figura 3.

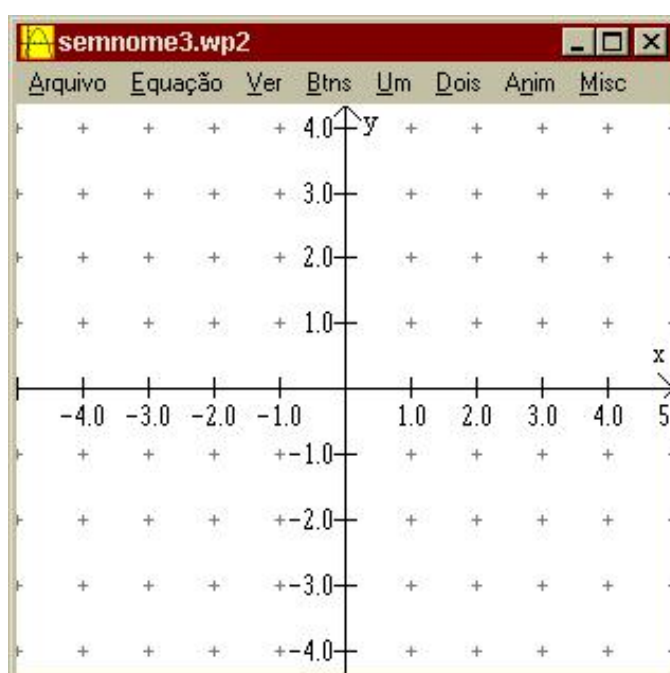


Figura 3

Observamos na figura 3 os menus: **arquivo**, **equação**, **ver**, **btns**, **um**, **dois**, **anim** e **misc**.

Observação 1 Podemos notar na janela mostrada na figura 3 que o eixo x varia entre -5 e 5 e o eixo y varia entre -4 e 4. O que não quer dizer que a nossa visualização do gráfico fique restrita a isto. Pois para resolver este problema basta apertar as teclas *PageUp* para aproximar e *PageDown* para afastar.

Menu arquivo

Quando clicamos no menu arquivo temos as seguintes opções:

- Abrir - Neste item podemos abrir algum arquivo antigo que já tenha sido salvo antes. Quando abrimos o arquivo, este aparecerá exatamente igual a quando foi salvo, inclusive contendo configurações adicionais, que eventualmente tenham sido feitas.
- Imprimir: Esta opção imprime a figura que está na tela do WinPlot. Contudo, antes de imprimir uma figura verifique as configurações definidas nos dois itens do menu, a seguir.
- Formatar: Esta opção abre uma janela onde podemos posicionar a imagem a ser impressa na página. Alterando as margens horizontal (**horiz**) e vertical (**vert**), que são medidas em centímetros e a partir do canto superior esquerdo. As opções **espessura** e **intervalo horiz** determinam o tamanho da imagem a ser impressa e são também especificadas em centímetros. Quando selecionamos a opção **moldura** o programa desenha um quadro ao redor da figura. E ativando a opção **impressora a cor** o software imprime a figura colorida, mas somente se a impressora for colorida.
- Selecionar Impressora: Permite escolhermos a impressora.
- Copiar: com esta opção copiamos a figura para área de transferência do computador, para podermos colar a figura atual para outro programa do Windows. Se desejamos incluir uma cor de fundo teremos que deixar a opção **cor de fundo** acionada. Note que a figura quando colada ela se adapta ao tamanho da tela do programa a ser colado. Então para a figura ficar no tamanho original quando colada devemos ajustar a tela de acordo com o tamanho da figura.
- copiar bitmap: copia a figura em formato Bitmap.
- Tamanho de Imagem: nela determinamos o tamanho da figura para quando imprimirmos ou copiarmos a tela as suas proporções sejam mantidas, por isso não há problema em imprimir uma janela grande a partir de uma imagem pequena. O problema é com o texto, que não é escalonado pelo processo de impressão, portanto pode parecer desproporcional, a menos que ajustemos o tamanho da janela com o tamanho da impressão.
- Senha: serve para colocarmos uma senha no arquivo desejado.

Menu equação

No menu equação encontramos as opções: explícita, paramétrica, implícita, polar, ponto, segmento, reta, desigualdades explícitas, desigualdades implícitas, inventário, tamanho do inventário e etc. Como nos mostra a figura 4.

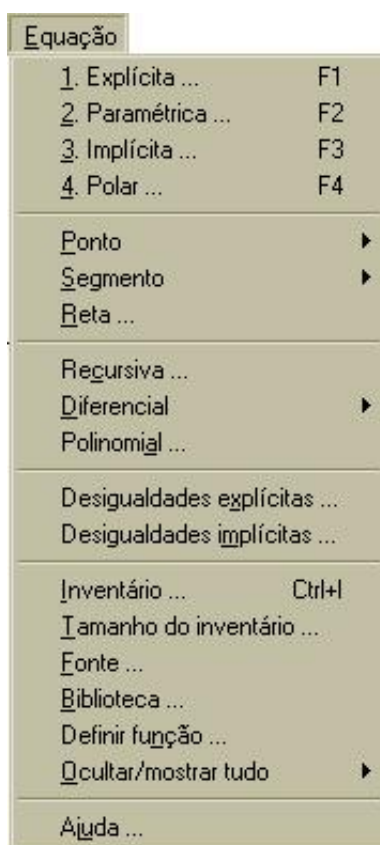


Figura 4

Opção Explícita

Dentro desta opção contruímos as funções explícitas, isto é, aquelas que são possíveis de se representar com y em função de x . Quando clicamos em **explícita** aparece uma nova janela como nos mostra a figura 5.

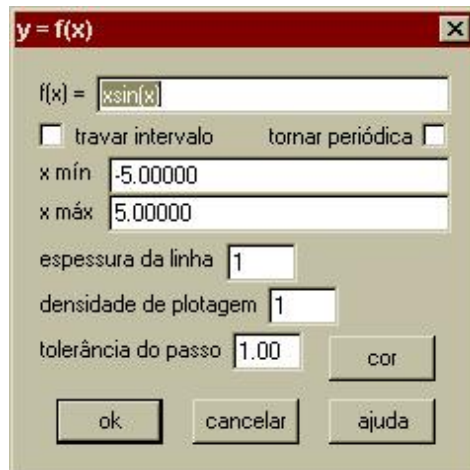


Figura 5

Na caixa de dialogo $f(x)$ = digitamos a função desejada. Segue abaixo uma lista das principais funções explitas com suas respectivas sintaxes:

- funções elementares

- pi - representa o Π
- $\ln(x)$, $\log(x)$ - $\ln(x)$ logarítmo de x na base e e $\log(x)$, logarítmo de x na base 10
- $\exp(x)$ - representa e^x , mas se quisermos usar outra base basta então colocar o acento circunflexo ao lado da base desejada. Por exemplo: 2^x é escrito como $2^{\wedge}x$,
- $\text{sqr}(x)$ ou $\text{sqrt}(x)$ - raiz quadrada de x,
- $\text{abs}(x)$ - módulo de x

- Outras funções

- $\text{root}(n,x)$ - raiz enésima de x
- $\text{power}(n,x)$ - enésima potência de x
- $\text{abs}(x,y)$ - $\text{sqrt}(x^*x+y^*y)$ que significa $\sqrt{x^2 + y^2}$
- $\text{abs}(x,y,z)$ - $\text{sqrt}(x^*x+y^*y+z^*z)$ que significa $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\log(b,x)$ ou $\ln(x)/\ln(b)$ - que nada mais é que $\log_b(x)$, mas observe que o programa quando recebe o comando $\log(b,x)$ ele aplica uma mudança de base para e e desenha o gráfico, ou seja, para ele $\log(b,x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

- funções definidas por várias sentenças : se digitarmos, por exemplo `joinx(x | 1,x+1 | 2,4)` o programa entenderá :

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Então através deste exemplo podemos perceber que `joinx` indica que a função é de várias variáveis, que a vírgula (,) separa uma função da outra e que `|` indica o intervalo. Note que quando a função esta no início o `|` representa até o valor indicado, no caso do nosso exemplo 1. Quando a função fica entre outras duas `|` usa o valor anterior “1” e faz até o próximo “2” e a ultima função não precisa do `|` porque o WinPlot entende que é do valor anterior até o infinito.

Se quisermos desenhar apenas um pedaço do gráfico então ativamos a opção **travar intervalo** e em seguida altermos os intervalos na caixa de diálogo **x min** e **x max** para o intervalo em que queremos que seja plotado o gráfico. Ainda temos a possibilidade de tornar periódico apenas aquele pedaço de gráfico, para isto basta ativar a opção **tornar periódica** no botão **cor** altermos a cor da linha do gráfico e na **espessura da linha** definimos a nova espessura da linha do gráfico.

Observação 2 *Apesar de o programa estar em português, note que os comandos são digitados em inglês, isto é, ao invés de digitarmos $\text{seno}(x)$, digitamos $\text{sin}(x)$, pois a única coisa que foi modificada nesta versão em português foram as etiquetas dos menus.*

Observação 3 *Se caso o usuário queira saber mais alguma função, então basta ir no menu biblioteca, dentro de equação, que o programa lista mais outras funções que não serão abordadas aqui.*

Então depois de escrevermos a função e alterarmos todos estes parâmetros para que o gráfico seja plotado devemos clicar no botão **ok**.

Quando clicamos no botão **ok** o programa plota o gráfico na tela mostrada na figura 3. Em seguida abre uma outra tela chamada de **inventário** onde ficam listadas todas as funções plotadas na tela. Conforme mostra figura 6.



Figura 6

Note que nesta janela temos onze botões, que servem para modificar a função em questão. No botão **editar** o programa abre novamente a tela da figura 5 para podermos alterar a função, o botão **apagar** apaga a função e o gráfico atual ou escolhido pelo usuário, o botão **dupl** permite com que coloquemos outra função ou troque uma função por outra, isto depende do que escolhermos, porque o programa pergunta se queremos apagar a fonte, isto é, apagar a função escolhida para desenhar o novo gráfico. O botão **copiar** copia a função para colar o texto em outro programa, o botão **tabela** mostra os valores que o programa aplicou na função para construir o gráfico, o botão **mostrar gráfico**, como o nome já diz, mostra ou esconde o gráfico na tela, o botão **mostrar equa** faz a mesma coisa que o mostra gráfico mas ao invés do gráfico ele faz isto com a função, botão **nome** permite que se um nome para a função.

Botão **família**: clicamos neste item para converter um determinado exemplo em uma família de curvas (ou pontos). Para que isto funcione, devemos definir o exemplo desejado para uma equação que tenha um parâmetro extra. Por exemplo, $y = ax^2 + bx + c$ define uma função quadrática que depende de três parâmetros **a**, **b**, e **c**. Cada um dos três podem ser usados para criar uma família de curvas. Se digitarmos **c** na caixa **parâmetro**, colocarmos o intervalo dos valores ao preencher as caixas **min** e **max** e dissermos quantas curvas devem estar na família preenchendo a caixa **passo**. E por fim, clicarmos em **definir** para completar o processo, veremos uma família de curvas definidas pelo parâmetro escolhido. Para desfazer esta construção, selecione o exemplo e clique **desdefinir**.

Veja o gráfico da equação quadrática $y = x^2 + a$ figura 7

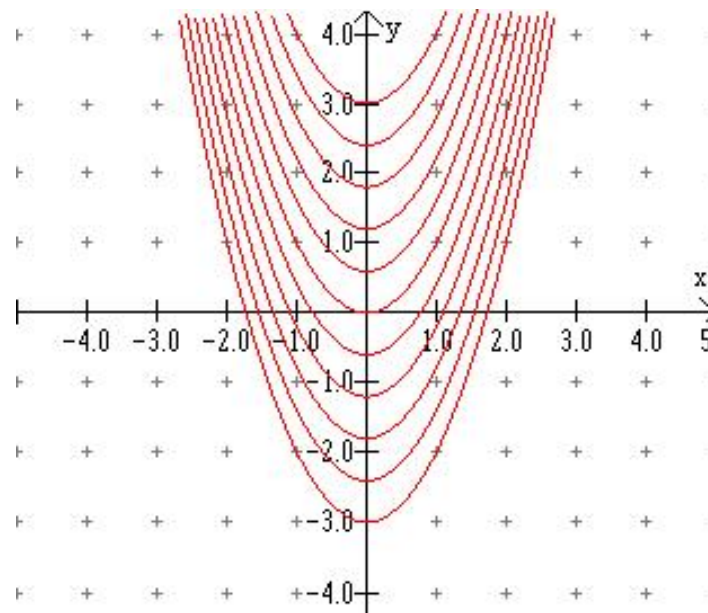


Figura 7

Podemos notar que para esta função escolhemos como parâmetro a variável **a**, configuramos o mínimo para **menos três** e o máximo para **mais três**, pedimos dez curvas. Na figura 7 observamos onze curvas apesar de ter escolhido dez é que o WinPlot desenha a primeira curva mãe e depois constrói mais o número de curvas que pedimos. No nosso exemplo ele construiu uma curva com a função $y = x^2 + a$, sendo a mãe x^2 e depois mais dez curvas com **a** variando entre menos três e três. Observemos agora a figura 8 ilustrando todas as alterações feitas.

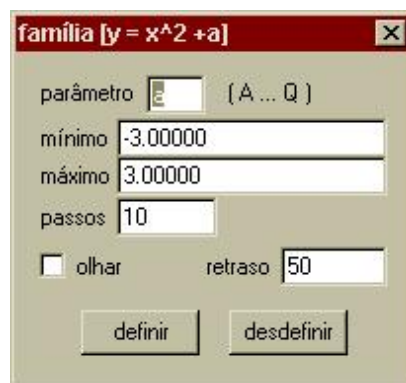


Figura 8

Na figura 8 ainda vemos as opções: **olhar** e **retrazo** que significam respectivamente que queremos olhar a construção e quanto tempo ele levará para construir as curvas.

Reta

Usamos este item para descrever uma reta $ax + by = c$ na tela. Digitando os coeficientes a , b , e c nos espaços correspondentes. Se tivermos desenhando uma linha utilizando a espessura 1 (normal) poderemos então desenhá-la pontilhada ou tracejada. Como nos mostra a figura 9.

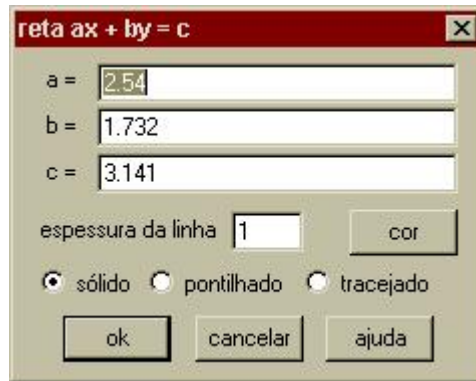


Figura 9

Desigualdades explícitas

Esta opção só podemos usar caso se tenha alguma função $y = f(x)$ no inventário. Essas curvas são usadas para definir regiões sombreadas. Cada uma dessas regiões são obtidas sombreando **acima** ou **abaixo** de uma determinada curva, ou **entre** duas curvas selecionadas. Os botões existentes na tela selecionam apenas um dos três casos. Para restringir os valores de x entre dois extremos, selecione **definir intervalo** e digite os valores extremos no espaço apropriado. O sombreado é feito por um padrão de pequenos pontos, cuja cor poderá ser selecionada. Uma vez que descrevemos a região, devemos clicar em **sombrear** para ver o resultado e para adicionar na lista de regiões. Cada clique no botão **sombrear** aumentará a densidade do sombreado. Para reduzir ou retirar todo sombreado, clique em **deletar um** ou **deletar todos**, respectivamente.

Vejamos o gráfico na figura 10.

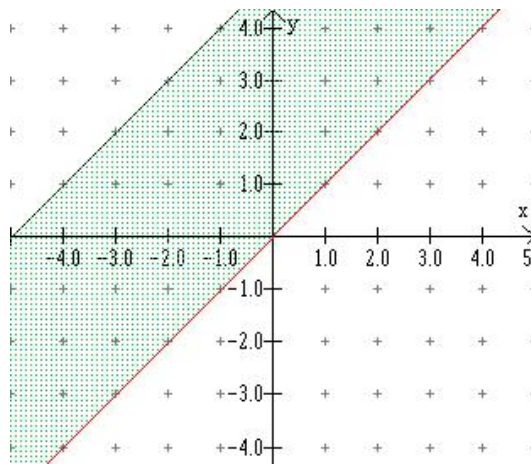


Figura 10

Neste gráfico sombreamos a parte entre as retas $y = x$ e $y = x + 5$. Observemos também a tela, figura 11, de desigualdade explícita com as alterações devidas para obtermos o resultado da figura 10.

Figura 11

Menu Um

Dentro deste menu temos dois comandos importantes para o estudo de funções, as opções: **zeros** e **extremos**.

Zeros

Este comando permite acharmos as raízes (zeros) da função desejada. Por exemplo, seja a função $y = x^2 - 1$, sabemos que as raízes desta função são: -1 e 1 . Mas supondo que não soubessemos e resolvessemos pedir para o WinPlot calculá-las. Então após plotarmos o gráfico devemos clicar no menu **um** em seguida em **zeros**. Observe que aparecerá uma janela conforme figura 12.

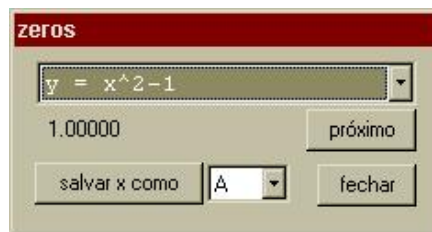


Figura 12

Podemos observar que o programa traz uma raiz que é -1 para vermos a outra basta clicarmos no botão **próximo**. Caso função que apareça na tela não seja a desejada então é só trocar clicando na seta para baixo ao lado da função ilustrada na tela. Temos ainda a opção de salvarmos aquele ponto com um nome, que seria uma letra de A a Z.

Extremos

Vamos pegar o mesmo exemplo da função usada anteriormente $y = x^2 - 1$. Para calcular o seu extremo, ou seja, o seu mínimo devemos clicar no menu **um** em seguida clicar em **Extremos**. O programa abrirá uma tela como mostra a figura 13.



Figura 13

Observamos neste exemplo que ele nos mostra $x = 0$ e $y = -1$, que nada mais são que o x do vértice e o y do vértice, ou seja, o mínimo desta parábola. E se olharmos o gráfico o software marca as coordenadas dos extremos mostrada na tela da figura 13 com um x no gráfico. Caso a função em estudo tenha mais de um extremo, então basta ir clicando no botão **proximo extremo de** que o WinPlot vai mostrando as coordenadas dos outros extremos e ao mesmo tempo vai marcando um x em cada coordenada no gráfico.

Dois

Neste menu temos a opção **Interseções** que utilizamos quando queremos ver as interseções entre duas funções.

Para construirmos mais de uma função num mesmo gráfico o método é simples, basta ir em no menu **Equação**, em seguida em **Explícita**, digitar a função e apertar no botão **ok**. Depois devemos repetir o processo para a próxima função e assim por diante. Então o WinPlot deixa os gráficos ao mesmo tempo plotados na tela. No programa podemos ter até trinta e seis funções plotadas juntas. Este número pode ser mudado no menu **tamanho do inventário** que está dentro do menu **Equação**.

Para verificarmos as interseções entre duas funções, o processo é o seguinte: primeiro plotamos as funções no gráfico, em seguida devemos clicar em **Dois** e depois em **Interseções**. Podemos observar que aparece uma tela como mostra a figura 14, mostrando uma das interseções, para visualizarmos as outras interseções basta irmos clicando no botão **prox interseção**, observe que aqui também o programa vai simultaneamente marcando no gráfico as interseções com uma cruz e se quisermos que este ponto fique mesmo marcado, pois ao clicarmos no botão **prox interseção** o programa desmarca o ponto anterior e marca o próximo, devemos clicar no botão **marcar ponto**.



Figura 14

Como podemos ver na figura 4 existem dentro do menu Equação ainda os comandos: paramétricas, implícita, polar, ponto e segmento, que não serão apresentados neste capítulo.

Exercícios que não podem ser feitos com o software WinPlot

Listamos alguns exemplos de exercícios que não podem ser resolvidos com o software WinPlot.

Exemplo 1 Se $f(x) = -3x + 2$, calcule os valores reais de x para que se tenha, $f(x)=11$.

Este exercício não é indicado pois o software não resolve equações. Teríamos então que escrever a nova função $f(x) = -3x - 9$ fazendo $f(x) = -3x + 2 - 11$ e perguntar qual a raiz desta função.

Exemplo 2 Sabendo que $f(x + 1) = 2x$, calcule $f(4)$.

O software não ajudaria neste caso pois não permite manipular $f(x)$, então no caso deste exercício não conseguiríamos determinar o valor de x usando apenas o software.

Exemplo 3 Dada a função $f(x) = ax + b$ e sabendo que $f(3) = 5$ e $f(-2) = -5$, calcule $f(\frac{1}{2})$

Este exercício não é possível de ser feito no WinPlot, porque ele não faz interpolações, e nem trabalha com sistemas, que é o caso deste exercício.

Exemplo 4 Dada a função $f(x) = 3x^2 - 5x + m$, calcule m para que a função tenha raízes reais iguais.

Para este exercício ser feito com o auxílio do software o aluno teria que montar a equação que determinaria que $f(x) = 3x^2 - 5x + m$ tenha raízes reais iguais no ambiente lápis e papel, isto é, determinar esta equação $-12m + 25$, em seguida trocar o m por x , aplicar no programa, para depois pedir para ele calcular as raízes. Isto mostra que teríamos muito trabalho e perderíamos muito tempo, para resolver um exercício utilizando algum comando do programa que seria resolvido rapidamente em sala de aula.

Exemplo 5 Seja $f(x) = 4^x + 1$, calcule $f(\frac{1}{2})$.

Este exercício não pode ser resolvido usando o WinPlot, pois ele não calcula $f(x)$ em um ponto.

Atividades

1. Faça o gráfico das funções e determine o domínio e a imagem de cada uma delas:
 - (a) $y = x$ no intervalo $[2,3]$
 - (b) $y = x^2 - 4x + 4$
 - (c) $y = \log_4(x)$
 - (d) $y = \sqrt{x + 3}$
 - (e) $y = x + 2$
 - (f) $y = 2^x$
 - (g) $y = |x|$
2. Faça o gráfico das funções $y = x + 1$, $y = x^2 - 4$, $y = |x + 1|$, $y = \log_3(x + 5)$ e determine para cada função o intervalo onde são crescentes ou decrescentes.
3. Faça o gráfico de cada uma das funções identificando quais são pares, ímpares ou nem par nem ímpar.
 - (a) $y = x$

(b) $y = |x|$

(c) $y = x^2$

(d) $y = x^2 - 6x + 9$

(e) $y = |x| - 2$

4. Determine as raízes das funções abaixo, no ambiente lápis e papel e com o software. Qual a relação entre as raízes de uma função e os pontos de intersecção do gráfico como o eixo dos x?

(a) $f(x) = x^2 + x - 6$

(b) $g(x) = 2^x - 1$

(c) $h(x) = 3x - 1$

5. Ache o ponto de intersecção entre as funções indicadas abaixo, no ambiente lápis e papel e com o software. Qual a relação dos pontos de intersecção, marcados na tela, entre os gráficos das funções com as repostas obtidas no papel?

(a) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = -x + 3$