Primeira Prova Simulada – Análise matemática

1) Considere: **P** = conjunto dos pares
Pr = conjunto dos primos
N = conjunto dos naturais
Z = Conjunto dos inteiros
Q = Conjunto dos racionais
Q^c = Conjunto dos irracionais
R = Conjunto dos reais

e preencha com o(s) número(s), $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $\cup$, $\cap$, $=$, $\neq$, $>$, $<$, $>>$ ou $<<$

a) $\{3, 7, 11\} \subset$ **Pr** (os símbolos $\in$ e $\notin$ só são usados entre um elemento e um conjunto)

b) **Q** $\cup$ **Q**^{c} = **R** (os símbolos < e > só são usados entre números e não entre conjuntos)

c) **#P** = **#N** = **#Z** = **#Q** $<<$ **#R** = **#Q**^{c} (conjuntos numeráveis e não numeráveis)

2) Enumerando os **Z** e **Q**, numa lista ordenada (padrão Cantor, como em sala), qual
a) o 14º inteiro? 7
b) a posição do racional -0,333...? 9º

3) Apresente exemplos em que
a) irracional × irracional = racional ➔ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$; $e \times (1/e) = 1$
b) irracional + racional = racional ➔ Não existe (pois os racionais são fechados pela subtração)
c) racional × racional = irracional ➔ Não existe (pois os racionais são fechados pela x)

4) Mostre que entre dois irracionais existe racional e irracional.
Não podemos usar exemplos, mas sim números genéricos.
Consideraremos r e s os irracionais quaisquer. Se tiverem sinais contrários, o (zero) é racional entre eles e a metade de r (ou de s) é irracional entre eles.
Se ambos tiverem o mesmo sinal, podemos considerá-los em módulo, com $r < s$, representados na forma decimal.
Depois do primeiro algarismo de s maior que o respectivo algarismo de r, troque todos os próximos algarismos de s por 0 (zero), obtendo um novo número racional, entre r e s.
A partir do primeiro algarismo de s maior que o respectivo algarismo de r, considere os dois números naturais formados pelos próximos algarismos consecutivos de r e de s respectivamente, até que a diferença entre estes dois números naturais tenham diferença maior que 1. Trocando estes dois números naturais por outo natural entre eles e mantendo todos os demais de r (ou de s), obtemos um número irracional entre r e s.
É verdade que de $1/7 < 1 < 5/3$, tiramos que $(S+6R)/7 < S < (5S - 2R)/3$, mas se $S = -6R$, $(S+6R)/7$ não será irracional.

5) Mostre que a cardinalidade do intervalo [1, 10) é a mesma dos reais não negativos.
Para cada $x \in [1, 10)$, fazemos corresponder biunivocamente um $y \geq 0$ por $y = \frac{1-x}{x-10}$ (não x-1)

6) Prove que se os conjuntos **A** e **B** são enumeráveis, então
a) **A** $\cup$ **B** é enumerável;
b) **A** x **B** é enumerável.

Consideremos **A** = $\{ a_1, a_2, a_3, ...\}$ e **B** = $\{ b_1, b_2, b_3, ...\}$.
(não pode ser com um exemplo, tem que ser genérixo)
Neste caso, podemos escrever **A** $\cup$ **B** = $\{ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...\}$, que á enumerável.

A x **B** é um conjunto de pares ordenados (a,b), e não de valores a.b
Dispondo os elementos de **A** x **B** numa tabela como Cantor, teremos

(a_1 , b_1) (a_1 , b_2) (a_1 , b_3) (a_1 , b_4) ...
(a_2 , b_1) (a_2 , b_2) (a_2 , b_3) (a_2 , b_4) ...
(a_3 , b_1) (a_3 , b_2) (a_3 , b_3) (a_3 , b_4) ...

Listamos **A** x **B** tomando as diagonais a partir do canto superior esquerdo:
A x **B** = $\{ (a_1 , b_1), (a_1 , b_2), (a_2 , b_1), (a_1 , b_3), (a_2 , b_2), ...\}$