Lista de exercícios: **Unidade 5 – Autovalores e Autovetores**

1) Verificar, utilizando a definição, se os vetores dados são vetores próprios das correspondentes matrizes:

a) $v = (-2,1), \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $v = (1,1,2), \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $v = (-2,1,3), \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) Determinar os valores próprios e os vetores próprios das seguintes transformações lineares:

a)$T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (x+2y, -x+4y)$

b)$T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (2x+2y, x+3y)$

c)$T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (5x-y, x+3y)$

d)$T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (y, -x)$

e)$T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$

f)$T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x,y,z) = (x, -2x-y, 2x+y+2z)$

g)$T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x,y,z) = (x+y,\ \ y,\ \ z)$

3) Calcular os valores próprios e os correspondentes vetores próprios das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b)$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d)$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Provar as seguintes proposições:

a) Se um operador linear $T: V \longrightarrow V$ admite λ=0 como valor próprio, então T não é inversível.

b) Uma matriz A e sua transposta A^t possuem os mesmos valores próprios.

c) Os valores próprios de uma matriz triangular (ou diagonal) são os elementos da diagonal principal.

5) Os vetores $v_{1=}(1,1)$ e$v_2 = (2,-1)$ são os vetores próprios de um operador linear $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$, associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determinar a imagem do vetor $v = (4,1)$ por esse operador.

6) a) Determinar o operador linear $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ cujos valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos vetores próprios $v_{1=}(y,-y)$ e $v_2 = (0,y)$, respectivamente.

b) Mesmo enunciado para $\lambda_1 = 3$,$\lambda_2 = -2$ e $v_1 = x(1,2)$, $v_2 = x(-1,0)$.

7) a) Quais são os valores próprios e os vetores próprios da matriz identidade?

b) Se $\lambda_1 = 4$ e$\lambda_2 = 2$ são valores próprios de um operador linear $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ associado aos vetores próprios $u = (2,1)$ e $v = (-1,3)$, respectivamente, determine $T(3u - v)$.

c) Mostrar que u ev são vetores próprios de uma transformação linear associados a λ, então $\alpha u - \beta v$é também vetor próprio associado ao mesmo λ.

8) Seja $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = (2,1)$ e triplica o comprimento do vetor $v = (1,2)$, sem alterar as direções nem inverter os sentidos.

a) Calcular $T(0,3)$.

b) Determinar $T(x,y)$.

c) Qual a matriz do operador T na base $\{(2,1),(1,2)\}$.

9) a) Determinar as matrizes das rotações em IR^2 que admitem vetores e valores próprios.

b) Determinar os valores e os vetores próprios das rotações referidas em a).

10) Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear não-inversível. Os vetores não-nulos do núcleo de T são vetores próprios? Em caso afirmativo, determinar o valor próprio associado e, em caso negativo, justificar.

11) Verificar se a matriz Aédiagonalizável. Caso seja, determinar uma matriz P que diagonaliza A e calcular $P^{-1}AP$:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

12) Seja $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ o operador linear definido por

$T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$

a) Determinar uma base do IR^2 em relação à qual a matriz do operador Té diagonal.

b) Dar a matriz de T nessa base.

13) Para cada uma das seguintes matrizes simétricas A, encontrar uma matriz ortogonal P, para a qual P^tAP seja diagonal:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

14) Determinar uma matriz P quediagonaliza A ortogonalmente e calcular $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Respostas de Problemas Propostos

1) a) sim, b) sim e c) não

2) a) $\lambda_1 = 3, v_1 = (y, y)$; $\lambda_2 = 2, v_2 = (2y, y)$

b) $\lambda_1 = 1, v_1 = y(-2,1)$; $\lambda_2 = 4, v_2 = x(1,1)$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, v1 = v2 = x(1,1)$

d) Não existem.

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ v1 = v2 = (x, y, -y)$; $\lambda_3 = 4, v3 = x(1,1,2)$

f) $\lambda_1 = 1,\ v1 = z(3, -3, 1)$; $\lambda_2 = -1, v2 = z(0, -3,1)$; $\lambda_3 = 2, v3 = z(0,0,1)$

g) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, v1 = v2 = v3 = (x, 0, z), x\ e\ z\ não\ simultaneamente\ nulos.$

3) a) $\lambda_1 = 2, v1 = y(3,1)$; $\lambda_2 = 4, v2 = y(1,1)$

b) $\lambda_1 = 1, v1 = (-y, y)$; $\lambda_2 = 5, v2 = (x, 3x)$

c) $\lambda_1 = 1, v1 = (x, 0, -x)$; $\lambda_2 = 2, v2 = (-2z, 2z, z)$; $\lambda_3 = 3, v3 = (x, -2x, -x)$

d) $\lambda_1 = -1, v1 = x(1,1,1)$; $\lambda_2 = 2, v2 = x(1,1,0)$; $\lambda_3 = 3, v3 = x(1,0,0)$

e) $\lambda_1 = 1, v1 = (2z, 2z, z)$; $\lambda_2\ e\ \lambda_3\ imaginários$

f) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, v1 = v2 = (x, y, -x - 2y)$; $\lambda_2 = 6, v2 = (x, x, x)$

g) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, v1 = v2 = v3 = (x, y, 2x + \frac{3}{2}y)$

h) $\lambda_1 = 2, v1 = x(1,0,1)$; $\lambda_2 = -1, v2 = y(0,1,0)$; $\lambda_3 = -2, v3 = x(1,0,-1)$

5) (8,11)

6) a) T(x,y) = (x, 2x+3y)

b) T(x,y)= (-2x + $\frac{5}{2}$y, 3y)

7) a) $\lambda = 1$, todos os vetores do espaço com exceção do vetor nulo.

b) (26,6)

8) a) (2,10); b) $T(x, y) = \left(\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y, -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}y\right)$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

9) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (rotação de 0º) e $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (rotação de 180º)

b) $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, respectivamente; com exceção do vetor zero, todos os vetores do IR² são vetores próprios.

10) Todos os vetores do núcleo, com exceção do zero, são vetores próprios associados a $\lambda = 0$.

11) a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) Nãodiagonalizável.

d) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) Nãodiagonalizável.

f) $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

h) Nãodiagonalizável.

12) a) {(-2,1),(1,2)}

b) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

13) a) $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$

e) $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

14) a) $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, $P^tAP=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

b) $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, P^tAP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

c) $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}, P^tAP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

d) $P=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}, P^tAP=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$

e) $P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{bmatrix}, P^tAP=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$