Lista de exercícios: **Unidade 4 – Operadores Lineares**

1) A seguir são dados operadores lineares T em IR^2 e em IR^3. Verificar quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determinar uma fórmula para T^{-1}.

a) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x, y) = (3x - 4y, -x + 2y)$

b) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x, y) = (x - 2y, -2x + 3y)$

c) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$

d) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x, y) = (5x + 2y, -4x - 2y)$

e) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x, y) = (x, -y)$

f) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, 2y - 3z)$

g) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y, z)$

h) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x, y, z) = (x, x - z, x - y - z)$

i) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, -2x + y - 3z)$

j) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$

2) Seja o operador linear T:IR³⟶IR³ definido pela matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mostrar que T é um isomorfismo.
Determinar a lei que define o operador T^{-1}.
Utilizar a matriz de T ou de T^{-1}para obter o vetor $v \in IR^3$ tal que $T(v) = (2, -3, 0)$.

3) Mostrar que o operador linear, no IR³, definido pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

não é inversível. Determinar $v \in IR^3$ tal que $T(v) = (6, 9, 15)$.

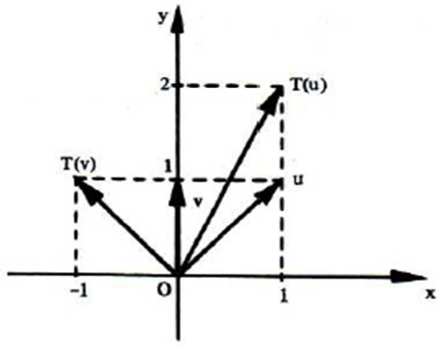
4) Verificar se o operador linear $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$ definido por $T(1,0,0) = (2, -1, 0)$, $T(0, -1, 0) = (-1, -1, -1)$ e $T(0, 3, -1) = (0, 1, 1)$ é inversível e, em caso afirmativo, determinar $T^{-1}(x, y, z)$.

5) No plano uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ radianos é seguida de uma reflexão em torno do eixo dos y.

a) Mostrar que a transformação é um isomorfismo.
b) Determinar a inversa da transformação definida.

6) Seja $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ o operador linear que transforma u em $T(u)$ e v em $T(v)$, conforme a figura

a) Dar a lei do operador T.



b) Determinar a transformação linear que transforma $T(u)$ em u e $T(v)$ em v.

7) Utilizar a inversão de matrizes $2 \; x \; 2$ para mostrar que:

a) A transformação linear inversa de uma reflexão em torno do eixo dos x é uma reflexão em torno desse eixo.

b) A transformação inversa de uma dilatação ao longo de um eixo é uma contração ao longo desse eixo.

c) A inversa de uma rotação do plano de um ângulo θ é a rotação do plano do ângulo −θ.

8) Consideremos as seguintes bases do IR^2: $A = \{(1,1), (0,-1)\}$ e $B = \{(2,-3), (-3,5)\}$.

a) Determinar a matriz-mudança de base $[\mathrm{I}]_B^A$.

b) Utilizar a matriz obtida do item a) para calcular v_B, sendo $v_A = (2,3)$.

c) Determinar a matriz-mudança de base de B para A.

9) Repetir o problema 8 para as bases A={(3,-1), (1,-2)} e $B = \{(3,2), (2,2)\}$, sendo $v_A = (4,3)$.

10) Sejam $B = \{(1,0), (0,1)\}$, $B_1 = \{(1,1), (-1,0)\}$, $B_2 = \{(-1,1), (2,-3)\}$ e $B_3 = \{(2,1), (-5,-1)\}$, bases do IR^2.

a) determinar as matrizes-mudança de base: $[\mathrm{I}]_B^{B1}, [\mathrm{I}]_{B1}^B$, $[\mathrm{I}]_B^{B2}$, $[\mathrm{I}]_{B2}^B$ e $[\mathrm{I}]_{B2}^{B3}$.

b) Determinar o vetor – coordenada de $v = (-3,4)$ em relação às bases B, B_1, B_2 e B_3.

11) Sabendo que:

$[\mathrm{I}]_B^A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$ e $B = \{(3,5),(1,2)\}$,

Determinar a base A.

12) sabendo que:

$[\mathrm{I}]_B^A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$ e $A = \{(1,3),(2,-4)\}$,

Determinar a base B.

13) A base B é obtido da base canônica A do IR^2 pela rotação de $\frac{\pi}{3}$ rad. Calcular:

a) $[\mathrm{I}]_B^A$

b) $[\mathrm{I}]_A^B$

14) Consideremos as seguintes bases do IR^3:

$A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $B = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,1,1)\}$

Determinar a matriz $[\mathrm{I}]_B^A$.

Utilizar a matriz obtida no item a) para calcular v_B, sendo $v_A = (1,2,3)$.

Determinar a matriz $[\mathrm{I}]_A^B$.

15) Se $[\mathrm{I}]_B^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinar $[v]_A$, sabendo que $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

16) Mostrar que para qualquer base A de um espaço vetorial, a matriz-mudança de base $[\mathrm{I}]_A^A$ é a matriz identidade.

17) Em relação aos operadores dados, determinar primeiramente a matriz T na base A e, a seguir, utilizar a relação entre matrizes semelhantes para calcular a matriz de T na base B.

a) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (x+2y, -x+y)$

$A = \{(-1,1),(1,2)\}$ e $B = \{(1,-3),(0,2)\}$

b) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (2x-3y, x+y)$

$A = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B = \{(3,0),(-2,-1)\}$

c) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2, T(x,y) = (7x-4y, -4x+y)$

A é a base canônica e $B = \{(-2,1),(1,2)\}$

d) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3, T(x,y,z) = (x-2y-2z, y, 2y+3z)$

A é canônica e $B = \{(0,1,-1),(1,0,0),(-1,0,1)\}$

18) Seja $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$ um operador linear. Consideremos as bases A canônica e $B = \{(4,1), (-11,-3)\}$. Sabendo que

$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Determinar $[T]_A$, utilizando a relação entre matrizes semelhantes.

19) Seja o operador linear $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$, $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

a) Determinar $[T]_B$, sendo $B = \{(1,2), (0,-1)\}$.

b) Utilizar a matriz encontrada em a) para calcular $T(v)_B$, sabendo que $v = (4,2)$.

20) Encontrar três matrizes semelhantes à matriz:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

21) Quais dos seguintes operadores são ortogonais?

a) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$, $T(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)$

b) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$, $T(x,y) = (-y, -x)$

c) $T: IR^2 \longrightarrow IR^2$, $T(x,y) = (x+y, x-y)$

22) Dentre os seguintes operadores lineares, verificar quais são ortogonais:

a) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, $T(x,y,z) = (z, x, -y)$

b) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, $T(x,y,z) = (x, y, z)$

c) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, $T(x,y,z) = (x, 0, 0)$

d) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, $T(x,y,z) = (x, ycos\theta + zsen\theta, -ysen\theta + zcos\theta)$

23) Verificar quais das seguintes matrizes são ortogonais e, dentre estas, determinar as que representam rotações:

$a)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ $c)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $d)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ $e)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $g)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ $h)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$ $i)\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$

24) Construir uma matriz ortogonal cuja primeira coluna seja:

a) $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

b) $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

25) Mostrar que se A e B são matrizes ortogonais, então AB também é ortogonal.

26) Mostrar, por meio da multiplicação de matrizes, que uma rotação de 30º seguida de uma rotação de 60º resulta em uma rotação de 90º.

27) Determinar a e b para que os seguintes operadores no IR^3 sejam simétricos:

a) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, $T(x, y, z) = (3x - 2y, ax + y - 3z, by + z)$.

b) $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, ax + 4y + bz, 2x - 3y + z)$.

Respostas de Problemas Propostos

01. a) $T^{-1}(x,y) = (x + 2y,\ \frac{1}{2}x\ +\ \frac{3}{2}y)$

b) $T^{-1}(x,y) = (-3x - 2y, -2x - y)$

c) T não é inversível

d) $T^{-1}(x,y) = (x + y, -2x - \frac{5}{2}y)$

e) $T^{-1}(x,y) = (x, -y)$

f) $T^{-1}(x,y,z) = (x - y + z, 3y - z, 2y - z)$

g) $T^{-1}(x,y,z) = (2x - y + 2z, -x + y - z, z)$

h) $T^{-1}(x,y,z) = (x, y - z, x - y)$

i) T não é inversível.

j) $T^{-1}(x,y,z) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,\ z\ , \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)$

02. b) $T^{-1}(x,y,z) = (x + z, 2x - y + z, -z)$
c) v = (2,7,0)

03. v = (z, 3-2z, z), z € IR

04. $T^{-1}(x,y,z) = (-y + z, -2x - 4y + 7z,\ x + 2y - 3z)$

05. b) $T^{-1}(x,y) = (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$

06. a) T(x,y) = (2x-y, x+y) b) $T^{-1}(x,y) = (\frac{x}{3} + \frac{y}{3}, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3})$

08. a) $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ b) $v_B\ = (7,4)$ c) $[I]_A^B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

09. a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -\frac{9}{2} & -4 \end{bmatrix}$ b) $v_B = (\ 25, -30)$ c) $\begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$

10. a) $[I]_B^{B^1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $[I]_{B^1}^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $[I]_B^{B^2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$[I]_{B^2}^B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $[I]_{B^2}^{B^3} = \begin{bmatrix} -8 & 17 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $v_B = (-3,4), v_{B^1} = (4,7), v_{B^2} = (1,-1), v_{B^3} = (\frac{23}{3}, \frac{11}{3})$

11. A = {(1,3), (1,-2)}

12. B = {(3,-2), (-2,1)}

13. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

14. a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $v_B = (7,-4,6)$ $c)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

17. a) $[T]_A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -\frac{19}{2} & 7 \end{bmatrix}$

b) $[T]_A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $[T]_A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18. $[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

19. a) $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ b) $T(v)_B = (6,10)$

21. São ortogonais a) e b)

22. São ortogonais a), b) e d)

23. São ortogonais: a), c), d), f), h), i)

São rotações: a), d), f), h), i)

24. a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

25. a) a = -2 e b = -3
b) a=0 e b=-3