Lista de exercícios: **Unidade 2 – Produto Interno**

1) Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Mostrar que cada operação a seguir define um produto interno no $\mathbb{R}^2$:

a) $u\,.\,v = x_1x_2 + y_1y_2$
b) $u\,.\,v = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$
c) $u\,.\,v = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$

2) Calcular o produto interno dos vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-3, 2)$ segundo cada produto do exercício anterior.

3) Sejam os vetores $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ de $V = \mathbb{R}^2$.
Verificar quais das funções $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas abaixo, são produtos internos em V:

a) $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$
b) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 - y_1y_2$
c) $f(v_1, v_2) = x_1^2x_2 + y_1y_2^2$
d) $f(v_1, v_2) = 4x_1x_2$
e) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 1$
f) $f(v_1, v_2) = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$
g) $f(v_1, v_2) = 4x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$
h) $f(v_1, v_2) = x_1y_2 + x_2y_1$

4) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$.
Verificar quais das seguintes funções são produtos internos sobre o $\mathbb{R}^3$. (Para aquelas que não são produtos internos, citar os axiomas que não se verificam.)

a) $u\,.\,v = x_1x_2 + 3y_1y_2$
b) $u\,.\,v = 3x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2z_1z_2$
c) $u\,.\,v = 2x_1^2y_1^2 + 3x_2^2y_2^2 + z_1^2z_2^2$
d) $u\,.\,v = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$
e) $u\,.\,v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - x_2y_1 - x_1y_2$

5) Consideremos o seguinte produto interno em P_2: $p\,.\,q = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$, sendo $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$.
Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcular:

a) $p_1\,.\,p_2$
b) $|p_1|$ e $|p_3|$
c) $|p_1 + p_2|$
d) $\frac{p_2}{|p_2|}$

e) O ângulo entre p_2 e p_3

6) Se $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ são matrizes quaisquer de M(2,2), a seguinte fórmula define um produto interno nesse espaço:

$u\,.\,v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$

Dados os vetores:

$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

determinar:
a) $|\,u + v\,|$
b) o ângulo entre u e v.

7) No espaço $V = P_2$ consideremos o produto interno
$f.g = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calcular $f.g$ e $|f|$ para $f(t) = t^2 - 2t$ e $g(t) = t + 3$.

8) Verificar a desigualdade de Cauchy quando se tem:

a) $u = (2,-1)$ e $v = (-2,-4)$ e o produto interno do problema 1b.
b) $u = -x^2 + x - 3$ e $v = 3x^2 - x + 1$ e o produto interno do problema 5.

9) Seja a função $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(1,1)$

$$f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longrightarrow [x_1, y_1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Mostrar que f é um produto interno em $\mathbb{R}^2$ e calcular:

a) A norma do vetor (1,3);
b) Um vetor unitário a partir de (1,3);
c) Um vetor ortogonal a (1,3).

10) Provar que se u e v são vetores de um espaço vetorial euclidiano, então:

a) $u \perp v$ implica que $|\,u + v\,|^2 = |u|^2 + |v|^2$
(Interpretar geométricamente este fato no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.)

b) $(u + v) \perp (u - v)$ implica $|u| = |v|$

11) Consideremos, no $\mathbb{R}^3$ (a) e no $\mathbb{R}^4$ (b), o produto interno usual. Para que valores de m os vetores u e v são ortogonais?

a) $u = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4, 1, 5)$
b) $u = (0, m, -1, 4)$ e $v = (5, m, -1, -1)$

12) Consideremos, no $\mathbb{R}^3$, o seguinte produto interno:

$(x_1, y_1, z_1) . (x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$

Determinar, em relação a esse produto interno, um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, -1, 2)$ e $v = (2, 1, 0)$.

13) Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determinar um vetor $u \in \mathbb{R}^3$ ortogonal aos vetores $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (5, 1, 3)$ e $v_3 = (2, -2, -3)$.

14) Determinar os vetores (a, b, c) para que o conjunto $B = \{(1, -3, 2), (2, 2, 2), (a, b, c)\}$ seja uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual. Construir a partir de B uma base ortonormal.

15) Seja $V = M(2,2)$ munido do produto interno definido no problema 6. Determinar x de modo que

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sejam ortogonais.

16) Seja P_1 o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 1. Definimos o produto interno entre dois vetores p e q de P_1, como segue:

$p . q = 2ac + ad + bc + 2bd$, sendo $\begin{cases} p(t) = at + b \\ q(t) = ct + d \end{cases}$

a) Calcular o ângulo entre $t - 1$ e $3t$.
b) Encontrar um vetor r(t) ortogonal ao vetor $t - 1$.

17) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e $A = \{(1, -1, -2)\} \subset$ V. Encontrar uma base ortogonal B de V tal que $A \subset B$.

18) Sendo $V = \mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual, determinar um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^4$ que seja ortogonal a $v_1 = (1, 1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$ e $v_3 = (-4,1,5,2)$.

19) Consideremos o seguinte produto interno no $\mathbb{R}^2$:

$(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$

Mostrar que, relativamente a esse produto interno, o conjunto
$A = \{(1, 0), (2, -1)\}$ é base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.

20) O conjunto $B = \{(2, -1), (k, 1)\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno:

$(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$

Determinar o valor de k e obter, a partir de B, uma base ortonormal.

21) Consideremos as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$:

a) $B = \{(3,4),(1,2)\}$
b) $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,2)\}$
c) $B = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,3,4)\}$

Ortonormalizar essas bases pelo processo de Gram-Schmidt, segundo o produto interno usual de cada espaço.

22) O conjunto $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Determinar o vetor coordenada de $v = (2,4)$ em relação à base B.

23) Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal dos seguintes subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ y - 2z = 0\}$
b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 0\}$

24) Determinar, em relação ao produto interno usual, uma base ortogonal para o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,0,-1,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (1,1,-1,2)$.

25) Seja $S = \{(x,y,z,-2x+4y+5z) / \ x,y,z \in \mathbb{R}\}$ subespaço de $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $A = \{(1,2,-1,1),(2,-1,2,2)\} \subset$ S.

a) Ortonormalizar o conjunto A.

b) Completar o conjunto A de modo a transformá-lo numa base ortogonal de S.

26) Seja $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e $B = \{(1,2,-3),(2,-4,2)\}$. Determinar:

a) O subespaço S gerado por B.
b) O subespaço $S^{\perp}$.

27) Seja V= $\mathbb{R}^3$ munido d$\mathbb{R}$o usual. Dados os subespaços:

$S1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - 2y + 3z = 0\}$ e
$S2 = \{t(2,1,-1) / \ t \in \mathbb{R}\}$
Determinar $S_1^{\perp}$ e $S_2^{\perp}$.

28) Consideremos o subespaço $S = \{(x,y,z) / \ x - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ com o produto interno:
$(x,y,z) \, . \, (x',y',z') \ = \ 2xx' \ + \ 3yy' \ + \ 4zz'$
Determinar $S^{\perp}$ e uma base de $S^{\perp}$.

Respostas de Problemas Propostos

2. a) -1 b) 4 c) 0

3. a), f), g)

4. a) Não é um produto interno. Falha o axioma P4.

b) É produto interno.

c) Não é produto interno. Falham os axiomas P2 e P3.

d) Não é produto interno. Falha o axioma P4.

e) Não é produto interno. Falha o axioma P4.

5. a) -18

b) $\sqrt{14}$ e $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

e) $cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

6. a) $\sqrt{21}$ b) $\theta = arc\ cos\frac{4}{\sqrt{42}}$

7. $-\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{12}}$ e $\sqrt{\frac{8}{15}}$

9. a) 5 b) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ c) t(-7,4)

11. a) $\frac{2}{17}$ b) $\pm\sqrt{3}$

12. $(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}, -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}})$

13. u = a(1,7,-4), a $\in \mathbb{R}$

14. t(-5,1,4), t≠0

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}\right)\right\}$$

15. $x = 4$

16. a) $\theta = arc\cos\frac{1}{2}$ b) t+1 (é uma das soluções)

17. {(1,-1,-2), (1,1,0),(-1,1,-1)} é uma delas.

18. Uma solução é (9, -8, 6, 7)

20. $k = -\frac{1}{3}$

$$\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

21. a) $\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)\}$

b) $\{(1,0,0), (0,\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

c) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0)\}$

22. vb = $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$

23. a) $\{(1,0,0), (0, \frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})\}$

b) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$

24. Existem infinitas bases ortonormais.

Uma delas:

$\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}}\right)\}$

25. a) $\{\left(\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{1}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\}$

b) Uma dela:

{(1,2,-1,1),(2,-1,2,2),(44,4,5,-47)}

26. a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$

b) $S^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$

27. $S_1^{\perp} = \{(x, -2x, 3x)/ x \in \mathbb{R}\}$

$S_2^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/ 2x + y - z = 0\}$

28. $S^{\perp} = \{(-2z,0,z)/ z \in \mathbb{R}\}$

Uma base: {(-2,0,1)}.