Lista de exercícios: **Unidade 1 – Espaços Vetoriais**

Nos problemas de 1 a 7 apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

1) $\mathrm{IR}^3, (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
$k(x, y, z) = (0,0,0)$

2) $\{(x, 2x, 3x);\ x \in \mathrm{IR}\}$ com as operações usuais

3) $\mathrm{IR}^2, (a, b) + (c, d) = (a, b)\ e\ \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

4) $\mathrm{IR}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') e\ \alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$

5) $\mathrm{IR}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')\ e\ \alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$

6) $A = \{(x, y) \in \mathrm{IR}^2 / y = 5x\}$ com as operações usuais

7) $A = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M(2,2) / \ a, b \in \mathrm{IR}\right\}$ com as operações usuais

Nos problemas 8 a 13 são apresentados subconjuntos de IR². Verificar quais deles são subespaços vetoriais do IR² relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

8) $S = \{(x, y)/y = -x\}$

9) $S = \{(x, x^2);\ x \in \mathrm{IR}\}$

10) $S = \{(x, y)/\ x + 3y = 0\}$

11) $S = \{(y, y);\ y \in \mathrm{IR}\}$

12) $S = \{(x, y)/\ y = x + 1\}$

13) $S = \{(x, y)/x \geq 0\}$

Nos problemas 14 a 25 são apresentados subconjuntos de IR³. Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

14) $S = \{(x, y, z)/x = 4y\ e\ z = 0\}$

15) $S = \{(x, y, z)/z = 2x - y\}$

16) $S = \{(x, y, z)/x = z^2\}$

17) $S = \{(x, y, z)/y = x + 2\ \ e\ \ z = 0\}$

18) $S = \{(x, x, x);\ x \in \mathrm{IR}\}$

19) $S = \{(x, x, 0)/x \in \mathrm{IR}\}$

20) $S = \{(x, y, z)/xy = 0\}$

21) $S = \{(x, y, z)/x = 0 \quad e \quad y = |z|\}$

22) $S = \{(x, -3x, 4x);\ x \in \text{IR}\}$

23) $S = \{(x, y, z)/x \geq 0\}$

24) $S = \{(x, y, z)/\ x + y + z = 0\}$

25) $S = \{(4t, 2t, -t);\ t \in \text{IR}\}$

26) Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de M(2,2):

a) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ c = a + b \quad e \quad d = 0\right\}$

b) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix};\ a, b, c \in \text{IR}\right\}$ (matrizes triangulares superiores)

c) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix};\ a, b, c \in \text{IR}\right\}$ (matrizes simétricas)

d) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & a + b \\ a - b & b \end{pmatrix};\ \text{a, b} \in \text{IR}\right\}$

e) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix};\ \text{a, b} \in \text{IR}\right\}$

f) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \text{ad} - \text{bc} \neq 0\right\}$ (conjunto de matrizes inversíveis)

27) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1,2,4)$ em IR^3.

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

c) Determinar uma condição entre a,b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

28) Consideremos no espaço $P_2 = \{at^2 + bt + c\ /\ a, b, c \in \text{IR}\}$ os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2.

c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3.

d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

29) Seja o espaço vetorial M(2,2) e os vetores:
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Escrever o vetor:

$v = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ como combinação linear dos vetores v_1,v_2 e v_3.

30) Escrever o vetor 0 Є IR² como combinação linear dos vetores
a) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 6)$

b) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 5)$

31) Sejam os vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $u = (-8, 4, 1)$, $v = (0, 2, 3)$ e $w = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

32) Expressar o vetor $u = (-1, 4, -4, 6)$ Є IR^4 como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

33) Seja S o subespaço do IR^4 definido por:
$S = \{(x, y, z, t) \in \mathrm{IR}^4 / \; x + 2y - z = 0 \;\; e \;\; t = 0\}$
Pergunta-se:

a)$(-1, 2, 3, 0) \in S$?

b)$(3, 1, 4, 0) \in S$?

c)$(-1, 1, 1, 1) \in S$?

34) Seja S o subespaço de M(2,2):
$S = \left\{\begin{pmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{pmatrix};\; a, b \in \mathrm{IR}\right\}$

Pergunta-se:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$?

b) Qual deve ser o valor de k para que o vetor $\begin{pmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ pertença a S?

35) Determinar os subespaços do IR³ gerados pelos seguintes conjuntos:
a) $A = \{(2, -1, 3)\}$

b) $A = \{(-1, 3, 2), \;\; (2, -2, 1)\}$

c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$

d) $A = \{(-1, 1, 0), (0, 1, -2), (-2, 3, 1)\}$

e) $A = \{(1, 2, -1), (-1\,, 1, 0), (-3, 0, 1), (-2, -1, 1)\}$

f) $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 0), (0, 0, 2), (-2, 1, 0)\}$

36) Seja o conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (-1, 3, -1)$ e $v_2 = (1, -2, 4)$.

Determinar:

a) O subespaço G(A).

b) O valor de k para que o vetor $v = (5, k, 11)$ pertença a G(A).

37) Sejam os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ e $v_3 = (1, 3, -1)$.
Se $(3, -1, k) \in [v_1, v_2, v_3]$, qual o valor de k?

38) Determinar os subespaços de P_2 (espaço vetorial dos polinômios de grau ≤2) gerados pelos seguintes vetores:
a) $p_1 = 2x + 2, \; p_2 = -x^2 + x + 3, \; p_3 = x^2 + 2x$
b) $p_1 = x^2, p_2 = x^2 + x$
c) $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$

39) Determinar o subespaço G(A) para $A = \{(1, -2), \; (-2, 4)\}$. O que representa geometricamente esse subespaço?
40) Mostrar que os vetores $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 1)$ geram o IR².

41) Mostrar que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ geram o IR³.

42) Seja o espaço vetorial M(2,2). Determinar seus subespaços gerados pelos vetores:
a) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

43) Determinar o subespaço de P_3 (espaço dos polinômios de grau ≤3) gerado pelos vetores $p_1 = x^3 + 2x^2 - x + 3$ e $p_2 = -2x^3 - x^2 + 3x + 2$.

44) Determinar o subespaço de IR^4 gerado pelos vetores $u = (2, -1, 1, 4)$, $v = (3, 3, -3, 6)$ e $w = (0, 4, -4, 0)$.

45) Verificar se o vetor $v = (-1, -3, 2, 0)$ pertence ao subespaço do IR^4 gerado pelos vetores $v_1 = (2, -1, 3, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, -1, 0)$.

46) Classificar os seguintes subconjuntos do IR² em LI ou LD:
a) $\{(1, 3)\}$

b) $\{(1, 3), \; (2, 6)\}$

c) $\{(2, -1), (3, 5)\}$

d) $\{(1, 0), (-1, 1), (3, 5)\}$

47) Classificar os seguintes subconjuntos do IR³ em LI ou LD:

a) $\{(2,-1,3)\}$

b) $\{(1,-1,1),(-1,1,1)\}$

c) $\{(2,-1,0),(-1,3,0),(3,5,0)\}$

d) $\{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$

e) $\{(1,2,-1),(2,4,-2),(1,3,0)\}$

f) {(1,-1,-2), (2,1,1), (-1,0,3)}

g) $\{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,2),(3,-1,2)\}$

48) Quais dos seguintes conjuntos de vetores pertencentes ao P_2 são LD?

a) $\{2 + x - x^2, -4 - x + 4x^2, x + 2x^2\}$

b) $\{1 - x + 2x^2, x - x^2, x^2\}$

c) $\{1 + 3x + x^2, 2 - x - x^2, 1 + 2x - 3x^2, -2 + x + 3x^2\}$

d) $\{x^2 - x + 1, x^2 + 2x\}$

49) Quais dos seguintes conjuntos de vetores do IR⁴ são LD?

a) $\{(2,1,0,0),(1,0,2,1),(-1,2,0,-1)\}$

b) $\{(0,1,0,-1),(1,1,1,1),(-1,2,0,1),(1,2,1,0)\}$

c) $\{(1,-1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1),(1,2,1,-2)\}$

d) $\{(1,1,2,4),(1,-1,-4,2),(0,-1,-3,1),(2,1,1,5)\}$

50) Sendo V o espaço vetorial das matrizes 2 x 3, verificar se {A,B,C} é LI ou LD, sendo
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

51) Determinar o valor de k para que seja LI o conjunto $\{(-1,0,2),(1,1,1),(k,-2,0)\}$.

52) Determinar k para que seja LD o conjunto:
$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\right\}$

53) Mostrar que são LD os vetores v_1,v_2ev_3, com v_1 e v_2 vetores arbitrários de um espaço vetorial V e $v_3 = 2v_1 - v_2$.

54) Mostrar que se u, v e w são LI, então $u + v$, $u + w$ e $v + w$ são também LI.

55) Sendo$v_1 = (1,2)$ ∈ IR², determinar v_2 ∈ IR² tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base do IR².

56) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam a base do IR²:
a) $\{(1,2),(-1,3)\}$
b) $\{(3,-6),(-4,8)\}$
c) $\{(0,0),(2,3)\}$
d) $\{(3,-1),(2,3)\}$

57) Para que valores de k o conjunto $B=\{(1,k),(k,4)\}$ é base do IR²?

58) O conjunto $B=\{(2,-1),(-3,2)\}$ é uma base do IR². Escrever o vetor genérico do IR² como combinação linear de B.

59) Quais dos seguintes conjuntos formam uma base do IR³?
a) $\{(1,1,-1),(2,-1,0),(3,2,0)\}$
b) $\{(1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,-4)\}$
c) $\{(2,1,-1),(-1,0,1),(0,0,1)\}$
d) $\{(1,2,3),(4,1,2)\}$
e) $\{(0,-1,2),(2,1,3),(-1,0,1),(4,-1,-2)\}$

60) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de P_2?
a) $\{2t^2+t-4,\ t^2-3t+1\}$
b) $\{1,\ t,\ t^2\}$
c) $\{2,\ 1-x,\ 1+x^2\}$
d) $\{1+x+x^2,\ x+x^2,\ x^2\}$
e) $\{1+x,\ x-x^2, 1+2x-x^2\}$

61) Mostrar que o conjunto
$\left\{\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{pmatrix}\right\}$

é uma base de M(2,2).

62) Mostrar que o conjunto

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,3),(0,0,0,5)\}$$

é base do IR^4.

63) O conjunto

$$A=\{t^3, 2t^2-t+3, \qquad t^3-3t^2+4t-1\}$$

é base de P_3? Justificar.

64) Mostrar que os vetores $v_1=(1,1,1)$,$v_2=(1,2,3)$,$v_3=(3,0,2)$ e $v_4=(2,-1,1)$ geram o IR³ e encontrar uma base dentre os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4.

65) Mostrar que os polinômios $p_1= 1+2x-3x^2$, $p_2=1-3x+2x^2$e $p_3=2-x+5x^2$ formam uma base do espaço dos polinômios de grau ≤2 e calcular o vetor-coordenada de $p=-2-9x-13x^2$ na base $B=\{p_1,p_2,p_3\}$.

66) Determinar uma base do subespaço do IR^4 gerado pelos vetores $v_1=(1,-1,0,0)$, $v_2=(-2,2,2,1)$, $v_3=(-1,1,2,1)$ e $v_4=(0,0,4,2)$.

67) Seja $V = IR^3$ e o conjunto
$B = \{(0,1,1),(1,1,0),(1,2,1)\} \subset IR^3$

a) Mostrar que B não é base do IR^3.

b) Determinar uma base do IR^3 que possua dois elementos de B.

68) Determinar o vetor coordenada de $v = (6,2)$ em relação às seguintes bases:
$\alpha = \{(3,0),(0,2)\}$

$\beta = \{(1,2),(2,1)\}$

$\gamma = \{(1,0),(0,1)\}$

$\delta = \{(0,1),(1,0)\}$

69) No espaço vetorial IR^3, consideremos a seguinte base: $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,1)\}$.
Determinar o vetor coordenada de $v \in IR^3$ em relação à base B se:

a) $v = (2,-3,4)$ b) $v = (3,5,6)$ c) $v = (1,-1,1)$

70) Seja $A = \{3, 2x, -x^2\}$ uma base de P_2.
Determinar o vetor-coordenada de $v = 6 - 4x + 3x^2$ em relação à base A.

71) Sejam os vetores $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$ e $v_3 = (0,-1,0)$ do IR^3.
a) Mostrar que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é base do IR^3.

b) Escrever $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ como combinação linear dos vetores da base B.

72) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:
a) $\{(x,y,z) \in IR^3 / \ y = 3x\}$

b) $\{(x,y,z) \in IR^3 / \ y = 5x \ e \ z = 0\}$

c) $\{(x,y) \in IR^2 / \ x + y = 0\}$

d) $\{(x,y,z) \in IR^3 / \ x = 3y \ e \ z = -y\}$

e) $\{(x,y,z) \in IR^3 / \ 2x - y + 3z = 0\}$

f) $\{(x,y,z) \in IR^3 / \ z = 0\}$

73) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de M(2,2):
a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \mathrm{b = a + c \ \ e \ \ d = c}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \mathrm{b = a + c}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \mathrm{c = a - 3b \ \ e \ \ d = 0}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ \mathrm{a + d = b + c}\right\}$

74) Seja o subespaço S de M(2,2):

$$S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} c = a + b \quad e \;\; d = a\right\}$$

a) Qual a dimensão de S?

b) O conjunto:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

É uma base de S? Justificar.

75) Encontrar uma base e a dimensão do espaço-solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ 2x + 4y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 4x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$

Respostas dos Problemas Propostos

1. Não é espaço vetorial. Falha o axioma M4

2. O conjunto é um espaço vetorial

3. Não é espaço vetorial. Falham os axiomas A2, A3 e A4

4. Não é espaço vetorial. Falha o axioma M2

5. Não é espaço vetorial falha o axioma M4

6. O conjunto é um espaço vetorial

7. O conjunto é um espaço vetorial

8. S é subespaço

9. S não é subespaço

10. É

11. É

12. Não é

13. Não é

14. É

15. É

16. Não é

17. Não é

18. É

19. É

20. Não é

21. Não é

22. É

23. Não é

24. É

25. É

26. São subespaços a), b), c), d)

27. a) $w = 3u - v$

b) $k = 12$

c) $16a + 10b - c = 0$

28. a) $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$

b) impossível

c) $a + 2b - c = 0$

d) não é possível

29. $v = 4v^1 + 3v^2 - 2v^3$

30. a) $0 = -2v^1 + v^2$

b) $0 = 0v^1 + 0v^2$

31. $u = 3v^1 - v^2 + 2v^3$

$v = v^1 + v^2$

$w = 0v^1 + 0v^2 + 0v^3$

32. $v = -v^1 + 3v^2 + 2v^3$

33. a) sim b) não c) não

34. a) sim b) $k = -2$

35. a) $\{(x, y, z) \in IR^3 / x = -2y \text{ e } z = -3y\}$

b) $\{(x, y, z) \in IR^3 / 7x + 5y - 4z = 0\}$

c) $\{(x, y, z) \in IR^3 / x + y - z = 0\}$

d) IR^3

e) $\{(x, y, z) \in IR^3 / x + y + 3z = 0\}$

f) IR^3

36. a) $G(A) = \{(x, y, z) \in IR^3 / 10x + 3y - z = 0\}$

b) $k = -13$

37. $k = 7$

38. a) $\{ax^2 + bx + c \,/\, b = 2a + c\}$

b) $\{ax^2 + bx \,/\, a, b \in IR\}$

c) P_2

39. $\{(x, y) \in IR^2 / y = -2x\}$

Representa uma reta que passa pela origem.

40. (x, y) = (x – y)(2,1) + (-x +2y)(1,1)

41. (x, y, z) = $xv^1 + (y - x)v^2 + (z - y)v^3$

42. a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ b = -2a - 5d\ \ e\ \ c = -a - d\ \right\}$

b) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a + b - c + d = 0\ \right\}$

43. $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \ /\ b = 5a + 3c \text{ e } d = 11a + 8c\}$

44. {(x, y, z, t) / 2x – t = 0 e y + z = 0}

45. Pertence

46. a) LI b) LD c) LI d) LD

47. a) LI b) LI c) LD d) LD e)LD f)LIg)LD

48.a,c

49. b,d

50. LI

51. k ≠ -3

52. k = 3

55. $v^2 \neq kv^1$,Vk € IR

56. a, d

57. k ≠ +-2

58. (x, y) = (2x + 3y)(2,-1) + (x+2y)(-3,2)

59. a) , c)

60. b) , c), d)

63. Não. G(A) ≠IR^3

64. Base: { v^1, v^2, v^3}

65. pβ = (1, 5, -4)

66. Uma base: {v^1, v^2}

67. Uma base: {(0,1,1), (1,1,0), (0,0,1)}

68. v α = (2, 1) ,$v\beta\ = (\frac{-2}{3},\frac{10}{3})$, $v\,\gamma = (6,2)$, $v\delta = (2,6)$

69. a) vb = (-2,1,4)

b) vb = (-3,11,6)

c)vb = (0,0,1)

70. va = (2,-2,-3)

71. a) B é LI e V(x,y,z) € IR³

$$(x, y, z) = \frac{x - z}{2} v^1 + \frac{x + z}{2} v^2 + (x - y + z) v^3$$

b)$e^1 = \frac{1}{2} v^1 + \frac{1}{2} v^2 + v^3$

$$e^2 = -v^3$$

$$e^3 = -\frac{1}{2} v^1 + \frac{1}{2} v^2 + v^3$$

72. As bases ficarão a cargo do leitor.

a) dim:2 | c) dim: 1 | e) dim: 2

b) dim:1 | d) dim: 1 | f) dim:2

73. a) dim: 2 | c) dim: 2

b) dim: 3 | d) dim: 3

74. a) 2 b) Não, porque $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \nexists S$

75. a) dim: 2

uma base: {(1,0,3,-5), (0,1,6,-10)}

b) dim: 2

uma base: {(0,-2,-1,1),(1,-3,-5,0)}

c) dim: 1

uma base: {(1,1,-1)}

d) dim: zero

não existe base

e) dim: 3

uma base: {(-1,0,0,1), (-1,1,0,0), (2,0,1,0)}